Università degli Studi di Napoli Federico II
Accademia Aeronautica

Laurea in
Gestione dei Sistemi Aerospaziali per la Difesa
(GESAD)

Corso di
MECCANICA DEL VOLO

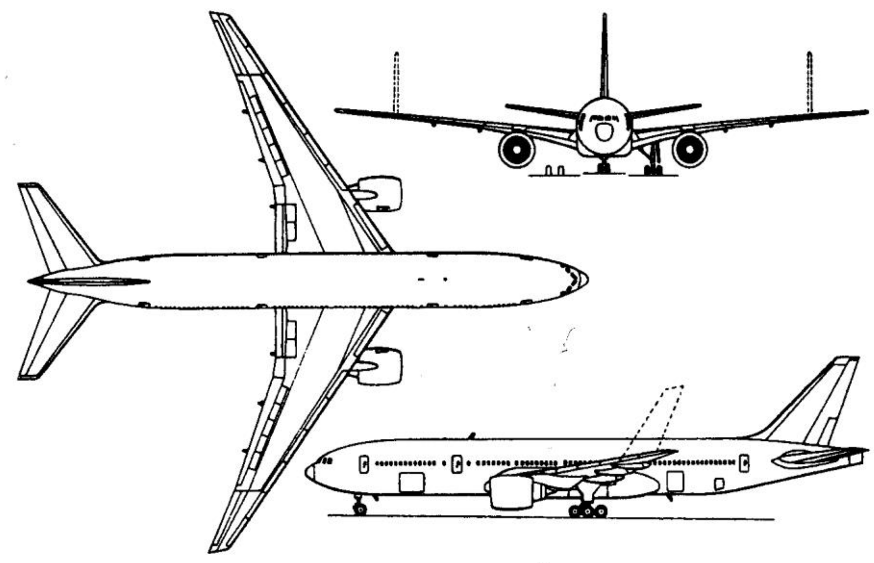
Prestazioni di Salita

Prof. A. De Marco

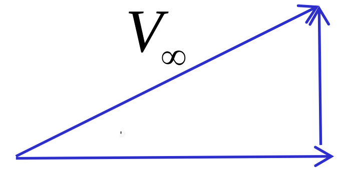
Prestazioni di salita

Si immagini un Boeing 777 (vedi figura) che si sta portando alla velocità di decollo sulla pista di un aeroporto. Esso si solleva dolcemente a circa 180 mi/h (289.7 km/h), il muso ruota verso l'alto, e l'aeroplano rapidamente sale fuori dalla vista. In una questione di minuti sta volando a velocità di crociera a 30000 ft (9144 m).

Quanto rapidamente può salire un aeroplano? Quanto tempo impiega a raggiungere una certa quota?

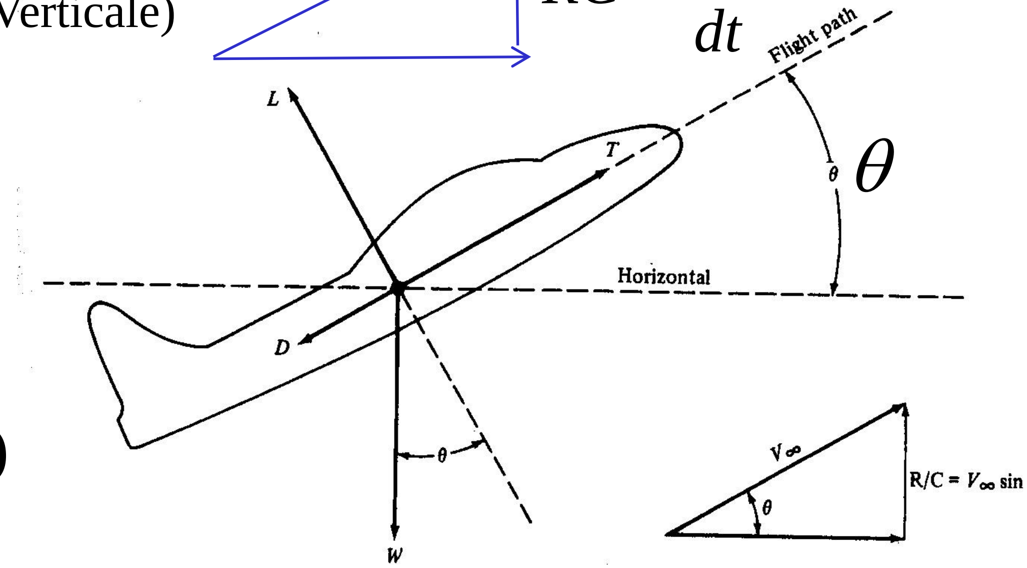


Prestazioni di salita



$$RC = \frac{dh}{dt}$$

Analisi del: => RATEO SALITA (vel. Verticale)
=> Angolo di salita θ



$$L = W\cos\theta$$
$$T = D + W\sin\theta$$

$$TV_\infty = DV_\infty + WV_\infty \sin\theta$$

$$\frac{TV_\infty - DV_\infty}{W} = V_\infty \cdot \sin\theta$$

ma

$$\boxed{RC \equiv V_\infty \sin\theta}$$

$$=> \; RC = \frac{dh}{dt} = \frac{TV_\infty - DV_\infty}{W}$$

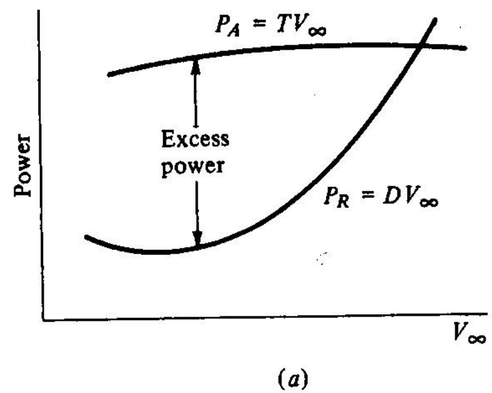
V_∞ È la velocità sulla traiettoria, cioè la velocità impostata dal pilota e che si legge sull'anemometro (solo a quota S/L) in quanto ad altre quote l'anemometro legge la CAS e non la TAS. **Viene detta velocità di salita**

È il **RATEO di salita**, cioè la componente verticale, cioè RC=dh/dt

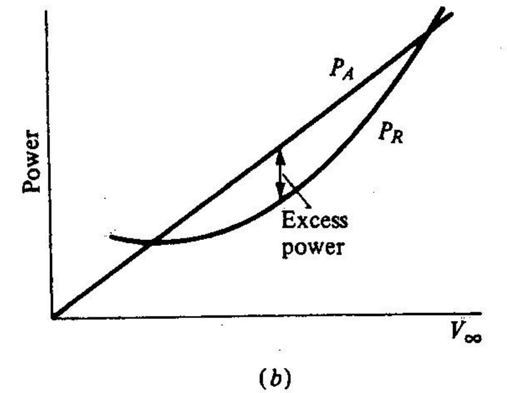
Quindi il rateo di salita di un velivolo ad una certa velocità dipende dall'eccesso di potenza.

$$RC \equiv V_\infty \sin\theta$$

Prestazioni di salita



Tipico vel. elica



Tipico vel. a getto

$$TV_\infty - DV_\infty = \text{ potenza in eccesso}$$

$$RC = \frac{\text{potenza in eccesso}}{W}$$

- Le potenze sono assunte pari a quelle in volo livellato
- Infatti l'angolo di salita è piccolo , cioè cosθ circa =1, cioè L=W

$$\sin\theta = \frac{T_d - D}{W} \qquad \theta \approx \frac{T_d - D}{W} = \frac{Eccesso\ di\ spinta}{peso}$$

L'equazione è approssimata se considero come potenza necessaria quella in volo livellato, cioè con L=W . Vediamo un esempio per capirlo :

Prestazioni di salita

semplicemente perché D è *più piccola per il volo in salita che per quello livellato alla stessa* V_∞. Per vedere ciò più chiaramente, consideriamo un aeroplano con W = 5000 lb (2268 kg), S = 100 ft^2 (9.29 m^2), CDo = 0.015, e = 0.6 e AR = 6. Se la velocità è $V_\infty = 500$ ft/s (548.64 km/h) al livello del mare, e se l'aeroplano è in volo *livellato*, allora $\mathrm{CL} = \mathrm{L}/\left(q_\infty \mathrm{S}\right) = \mathrm{W}/\left(\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 \mathrm{S}\right) = 0.168$.

Successivamente

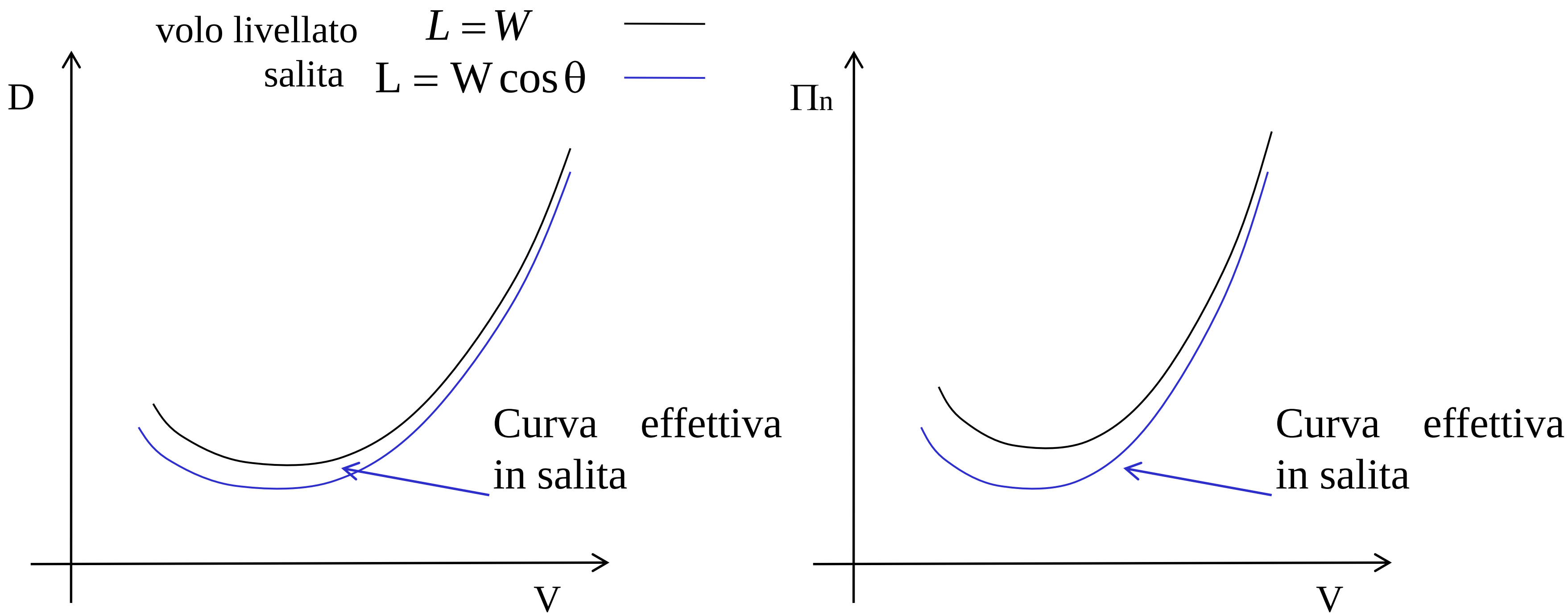
$$\mathrm{CD} = \mathrm{CDo} + \frac{\mathrm{CL}^2}{\pi e \mathrm{AR}} = 0.015 + 0.0025 = 0.0175$$

Ora consideriamo lo stesso aeroplano in una salita a 30° al livello del mare, con la stessa velocità $V_\infty = 500$ ft/s (548.64 km/h). Qui la portanza è minore del peso, $\mathrm{L} = \mathrm{W}\cos\theta$, e perciò $\mathrm{CL} = \mathrm{W}\cos 30° / \left(\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 \mathrm{S}\right) = 0.145$.

Successivamente, $\mathrm{CD} = \mathrm{CDo} + \mathrm{CL}^2 / \pi e \mathrm{AR} = 0.015 + 0.0019 = 0.0169$. Questo può essere paragonato con il valore più alto 0.0175 ottenuto sopra per il volo livellato. Come visto in quest'esempio, per un volo regolare in salita, L (quindi CL) è più piccola e perciò è più piccola la resistenza indotta. Conseguentemente, la resistenza totale per il volo in salita è più piccola di quella per il volo livellato alla stessa velocità.

Prestazioni di salita

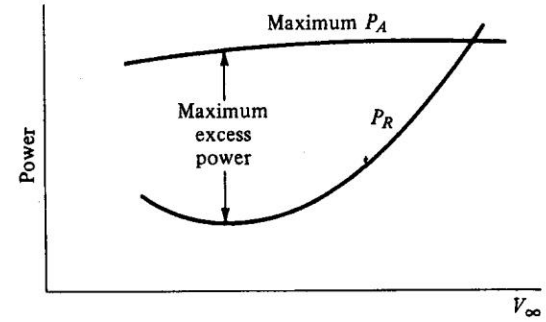
Poiché vale $L = W\cos\theta$ e non L=W Come nel caso del volo livellato E' come se la curva di resistenza e di potenza necessaria fossero riferite ad un peso inferiore



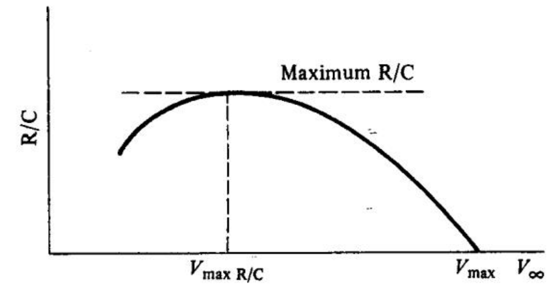
Bisogna però considerare che l'angolo di salita teta è piccolo (raramente riesce a superare i 10°, e quindi le differenze evidenziate dalle figure della resistenza in salita (curva blu a sinistra) e della potenza necessaria al volo in salita (blu curva a destra) sono veramente piccole e quindi verranno trascurate. Quindi assumeremo che la resistenza e la potenza necessaria al volo in salita siano uguali a quelle in volo livellato.

Prestazioni di salita

$$RC = \frac{potenza\ in\ eccesso}{W} \qquad sen\theta \approx \theta = \frac{spinta\ in\ eccesso}{W} = \frac{RC}{V_\infty}$$



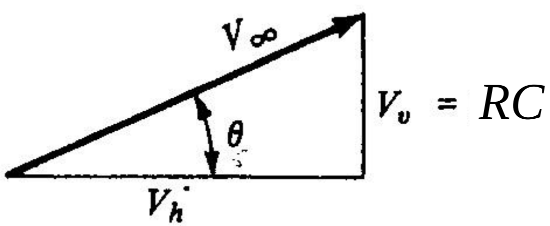
(a)

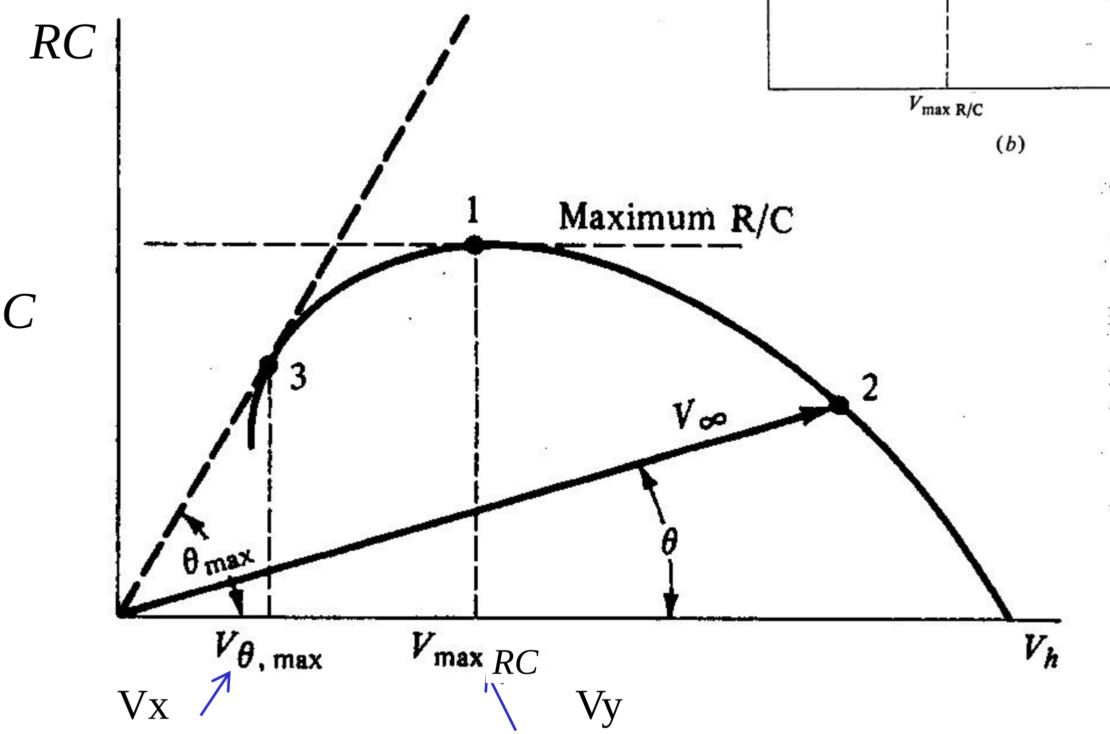


(b)

Odografo volo in salita (per data quota assegnata)

Si individuano, per data quota, dalla curva odografa la velocità che massimizza il rateo di salita RC ,detta anche Vy nei manuali di volo e velocità di salita rapida, *fastest climb speed*, e la velocità che massimizza l'angolo di salita (detta velocità di salita ripida "steepest climb" in inglese, ed indicata solitamente con Vx nei manuali di volo).





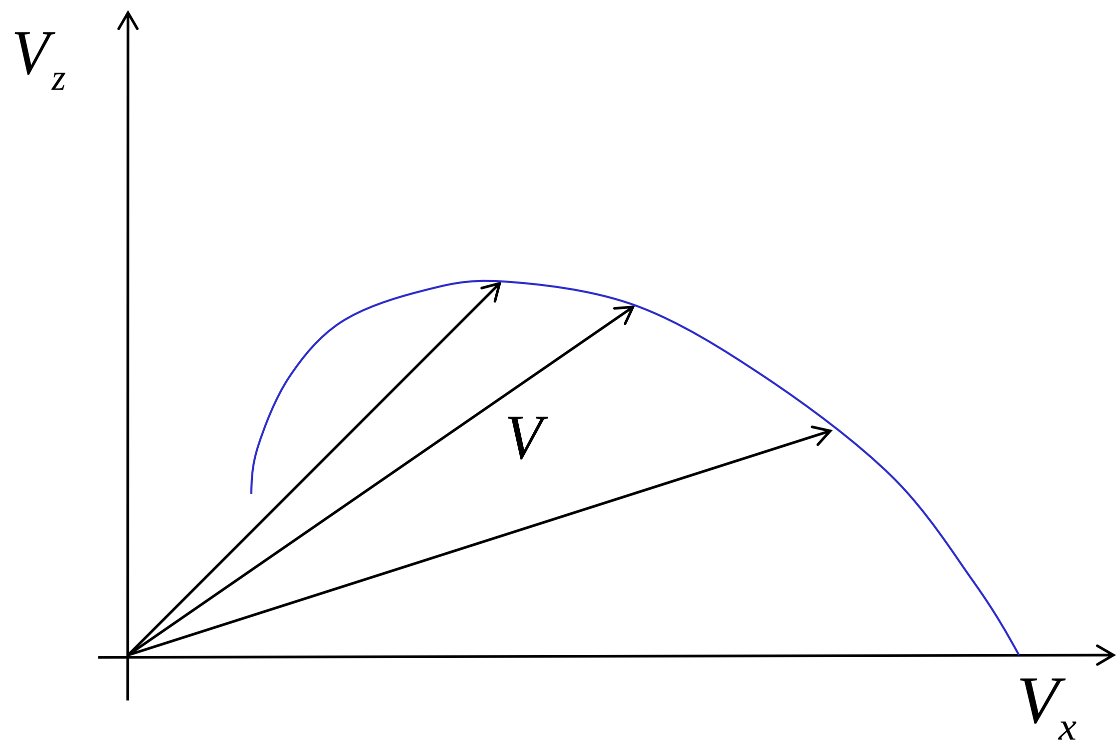
Non confondere il rateo di salita RC (vel. Verticale) dalla velocità di salita che è la vel orizzontale o anche la V sulla traiettroia

velocità di salita ripida velocità di salita rapida

Prestazioni di salita

<u>Odografo</u> Gr. *hódos* , strada e *grafikós*(γραφικός)

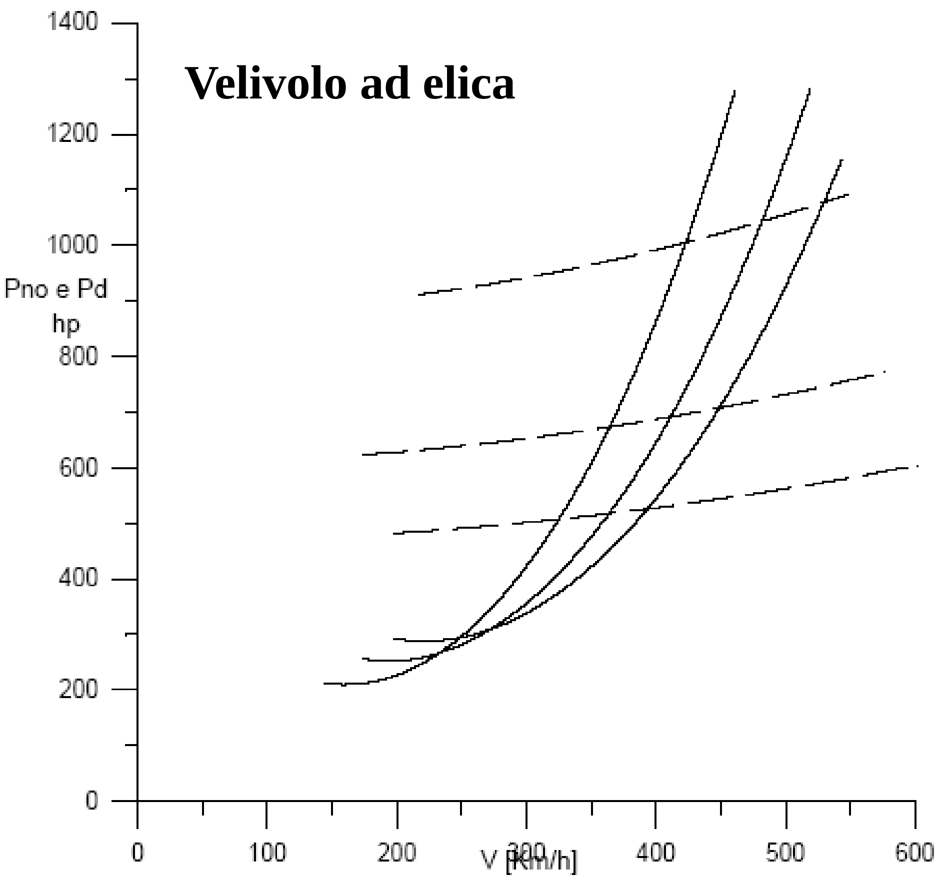
A **hodograph** is a diagram that gives a vectorial visual representation of the movement of a body or a fluid. It is the locus of one end of a variable vector, with the other end fixed. The position of any plotted data on such a diagram is proportional to the velocity of the moving particle. It is also called a **velocity diagram**.

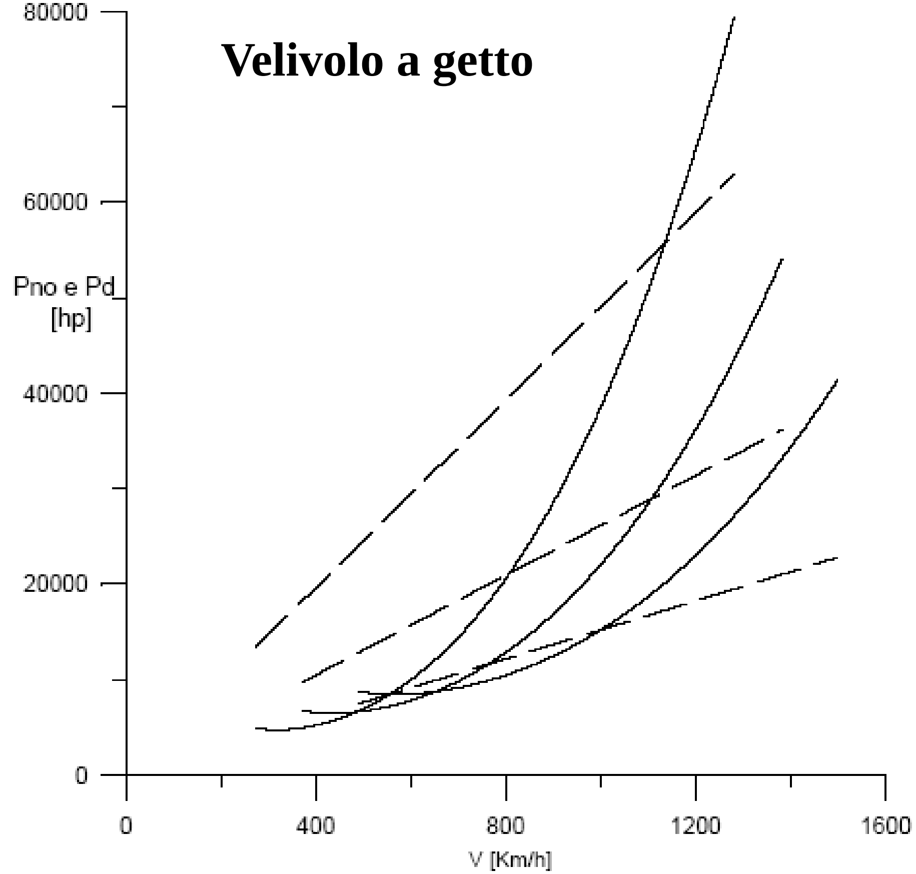


Prestazioni di salita

Le prestazioni precedenti sono da considerarsi ad una certa quota.
Che succede al variare della quota ?

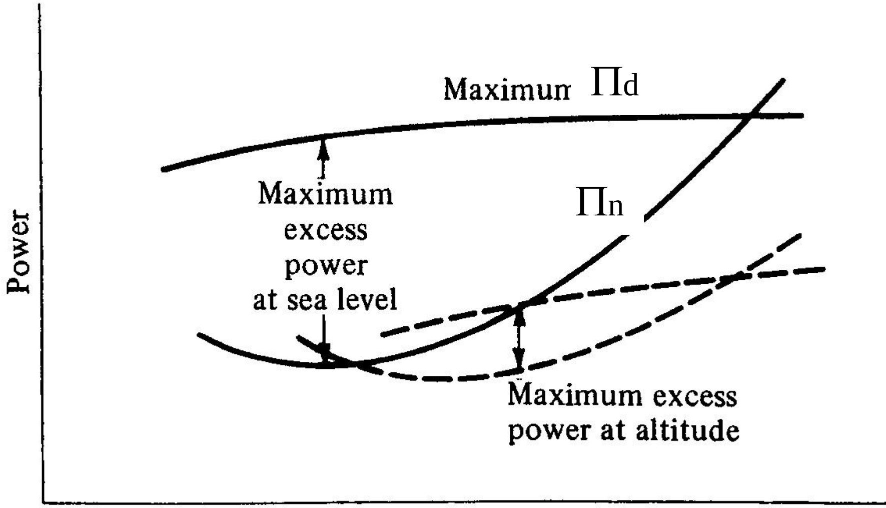
Differenze sul rateo di salita tra velivolo ad elica e a getto. Si vede che i massimi RC (massimo eccesso potenza) si ottengono a velocità maggiori per il velivolo a getto.





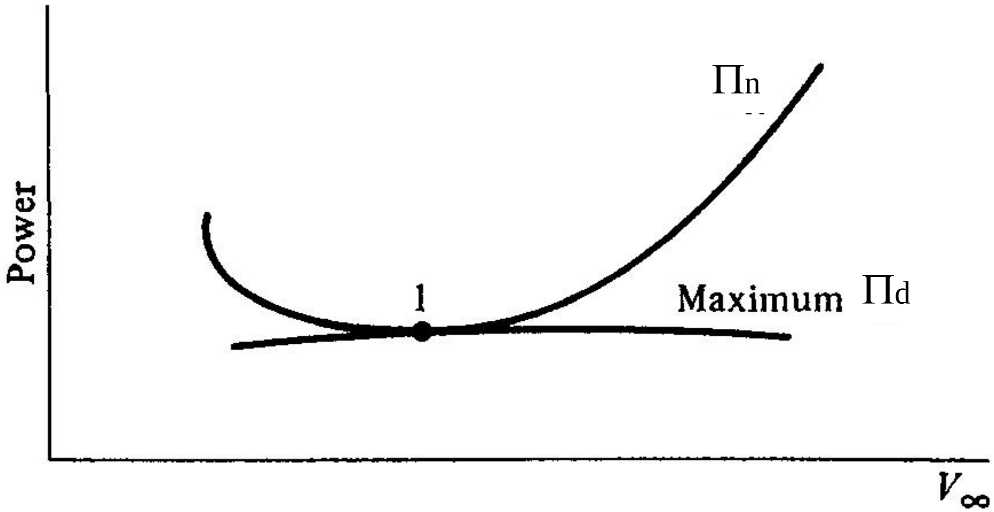
QUOTA DI TANGENZA

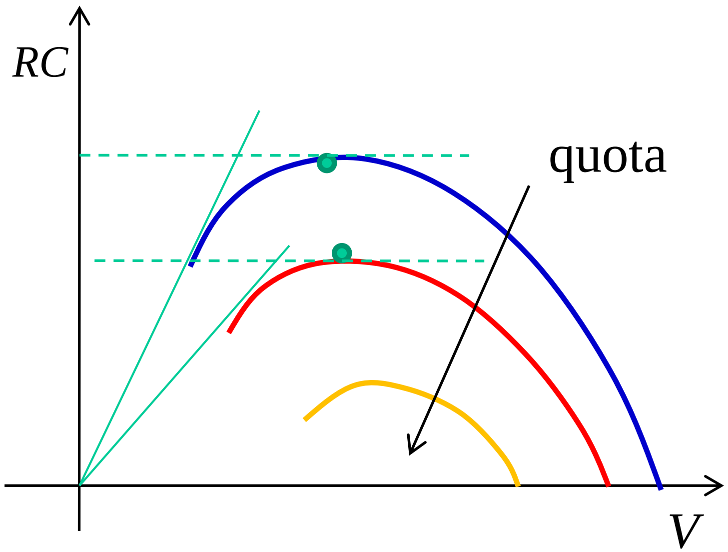
All'aumentare della quota, sia per l'elica che per il velivolo a getto la potenza disponibile si riduce per effetto della riduzione di densità.
E' quindi chiaro che si ridurrà il rateo di salita (ed anche il massimo rateo di salita).
Si arriverà quindi ad una quota massima alla quale il velivolo può sostenersi in volo livellato, quota alla quale il massimo Rc è =0. Tale quota viene chiamata quota di tangenza (*ceiling* in Inglese).



Sia il massimo RC che il massimo angolo di salita si riducono all'aumentare della quota.

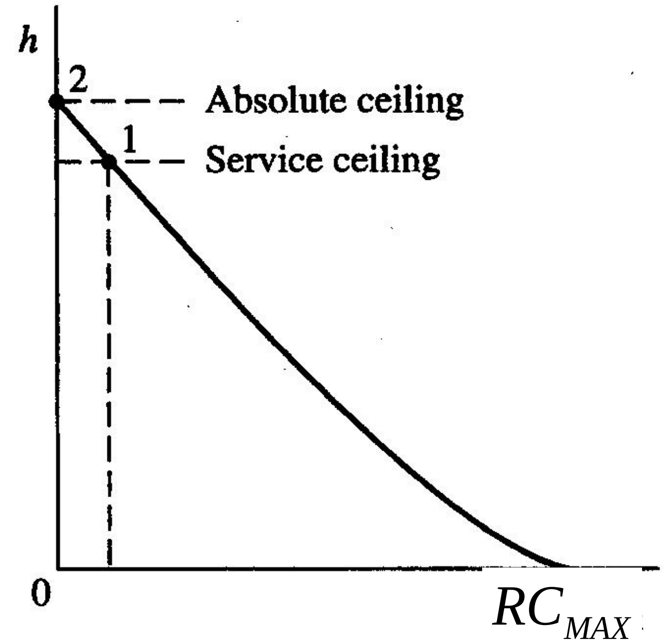
Condizione di TANGENZA



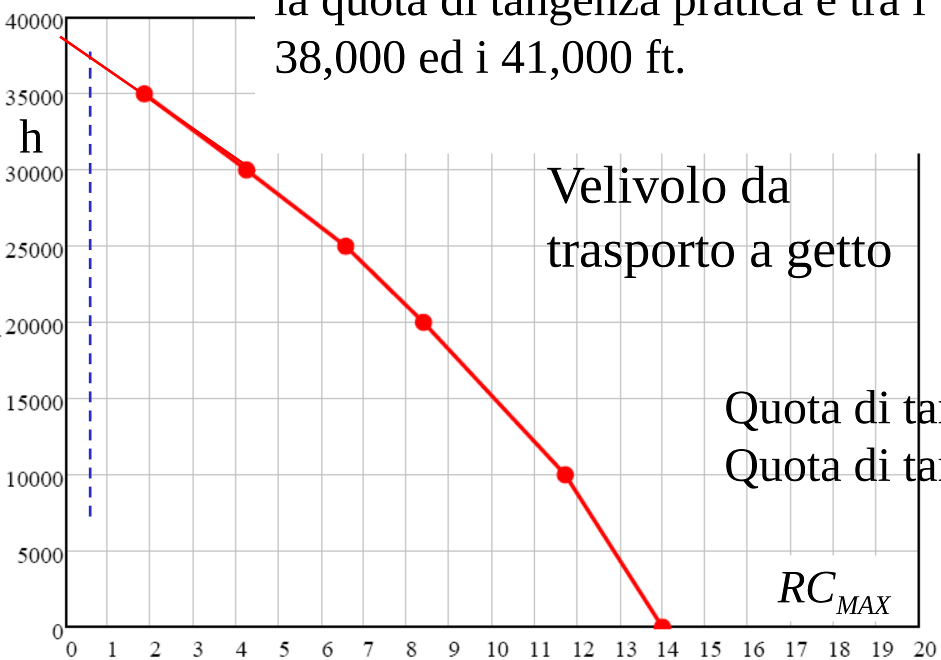


QUOTA TANGENZA

In effetti la quota di tangenza viene anche chiamata quota di tangenza teorica (*Absolute ceiling*) ed è una quota praticamente irraggiungibile perché il tempo per arrivarci diventa infinito(lo si vedrà meglio dopo). Si può però definire anche la quota di tangenza pratica (*Service ceiling*) come la quota alla quale il velivolo presenta un rateo di salita massimo residuo di circa 0.5 m/s (100 ft/min).



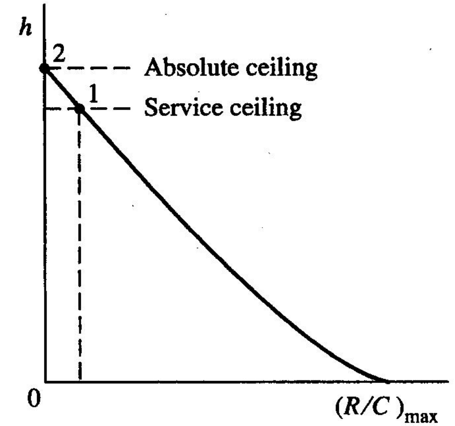
Per i velivoli a getto usualmente la quota di tangenza pratica è tra i 38,000 ed i 41,000 ft.



Tangenza Teorica (RC=0)
Tangenza pratica (RC=0.5 m/s) (circa 100 ft/min)

Quota di tangenza teorica (*R/C* = 0) = 39,000 ft
Quota di tangenza pratica (*R/C* = 0.5 m/s) = 38,000 ft

QUOTA TANGENZA



Oltre alle due quote di tangenza definite prima, ci possono essere altre quote di tangenza relative alla necessità di avere un certo margine per variare la velocità o effettuare leggere virate. Come vedremo successivamente in virata la potenza necessaria aumenta leggermente. Ecco quindi che si può definire il "*Cruise Ceiling*" come quota alla quale il massimo RC è di 300 ft/min.

Velivoli militari devono poter avere in quota anche capacità spinte di manovra e quindi richiedere maggiori riserve di potenza. In questi casi può essere definito il "*Combat Ceiling*" come la quota alla quale il massimo RC è di 500 ft/min (o in alternativa quota alla quale è possibile mantenere un certo angolo di bank (ad esempio 20-30°).

Based on maximum climb rates

Absolute Ceiling = 0 ft/min max RC (quota tangenza teorica)

Service Ceiling = 100 ft/min max RC (quota tangenza pratica)

Cruise Ceiling = 300 ft/min max RC

Combat Ceiling = 500 ft/min max RC

Prestazioni di salita – Vel. a getto

Facciamo prima l'esempio relativo al velivolo a getto MD-80, di cui riportiamo i dati :

W=WTO =63500 Kg peso massimo al decollo

S=112 m2 b=33 m AR=9.72

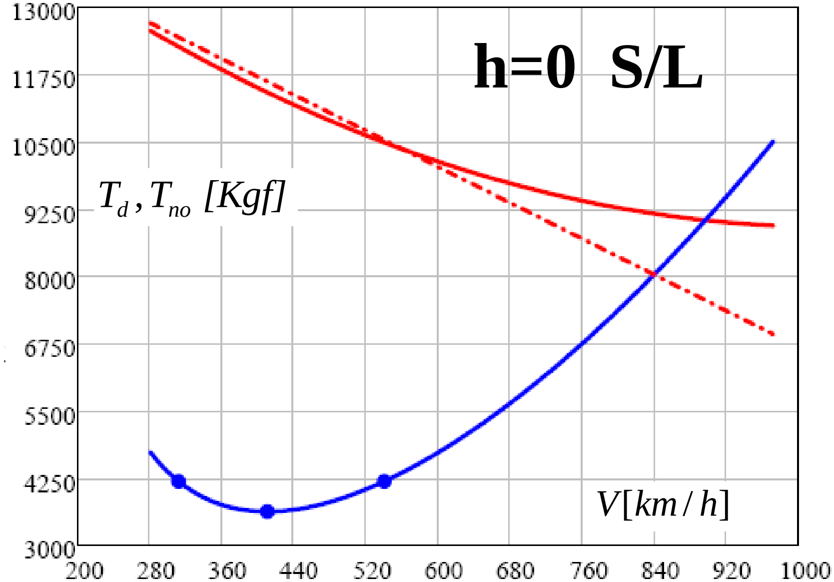
CDo=0.020 e=0.80 CLMAX=1.5

Imp. propulsivo : 2 motori PW JT8D da 9072 Kg di spinta ciascuno, cioè To=18144 Kg

Dai dati geometrici ed aerodinamici del velivolo ho :

EMAX=17.5

Prestazioni di salita – Vel. a getto



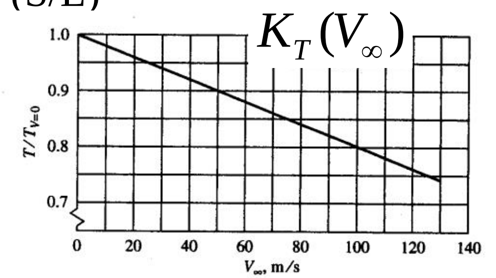
h=0 S/L

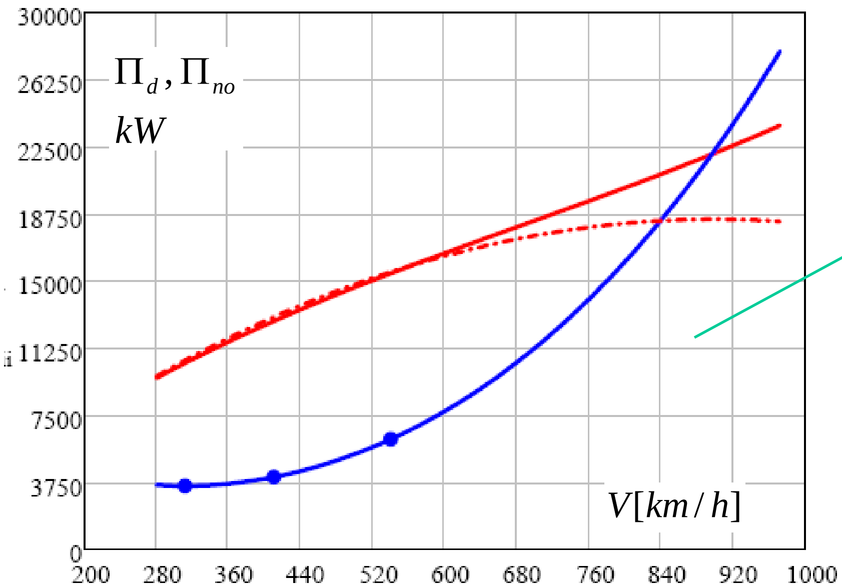
MAX CLIMB Modello esatto

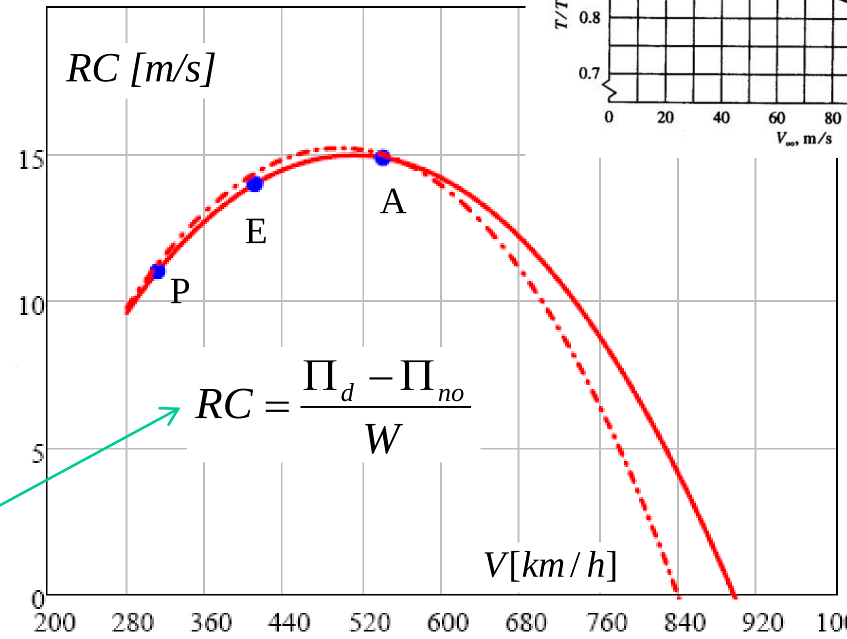
$$\boxed{T = (0.87 \cdot T_o) \cdot K_{MZ}(_{Mach,z}) \cdot \varphi}$$

MAX CLIMB Modello appross (S/L)

$$\boxed{T = 0.83 \cdot K_T(V_\infty) \cdot T_o \cdot \varphi}$$

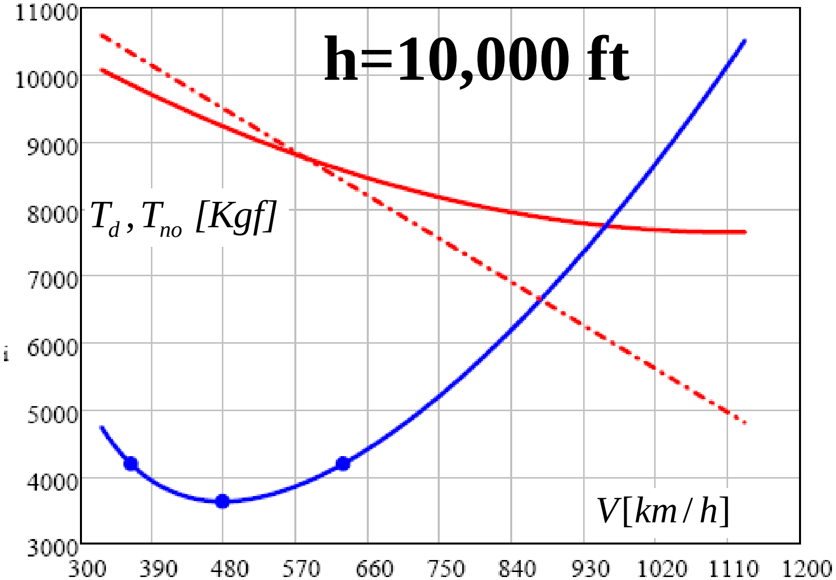


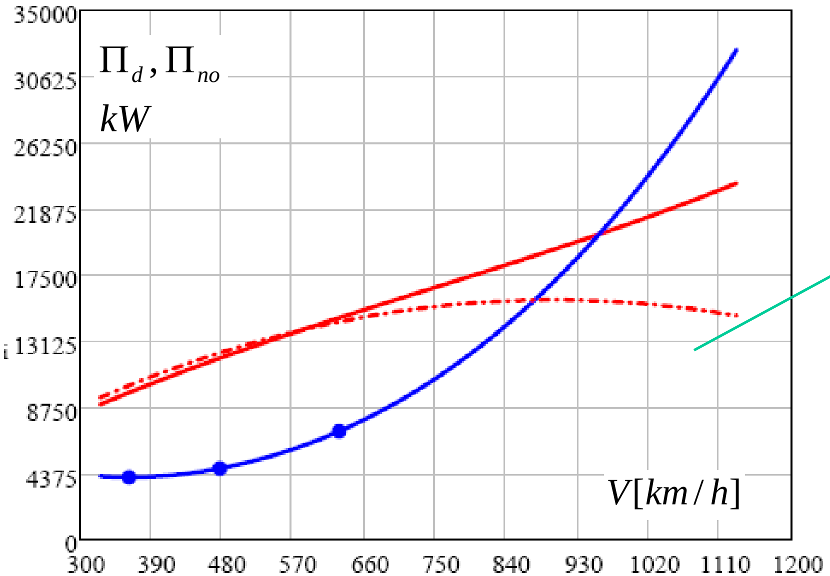




- Il modello approssimato permette di valutare in modo accurato il massimo rateo di salita
- Il massimo RC si ha tra E ed A (più vicino ad A)
- Valori del valore massimo intorno ai 15 m/s
- Valore del punto E molto prossimo al valore max

Prestazioni di salita – Vel. a getto





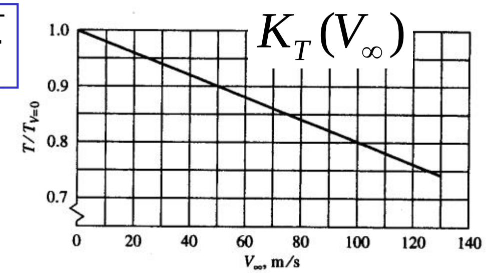
h=10,000 ft

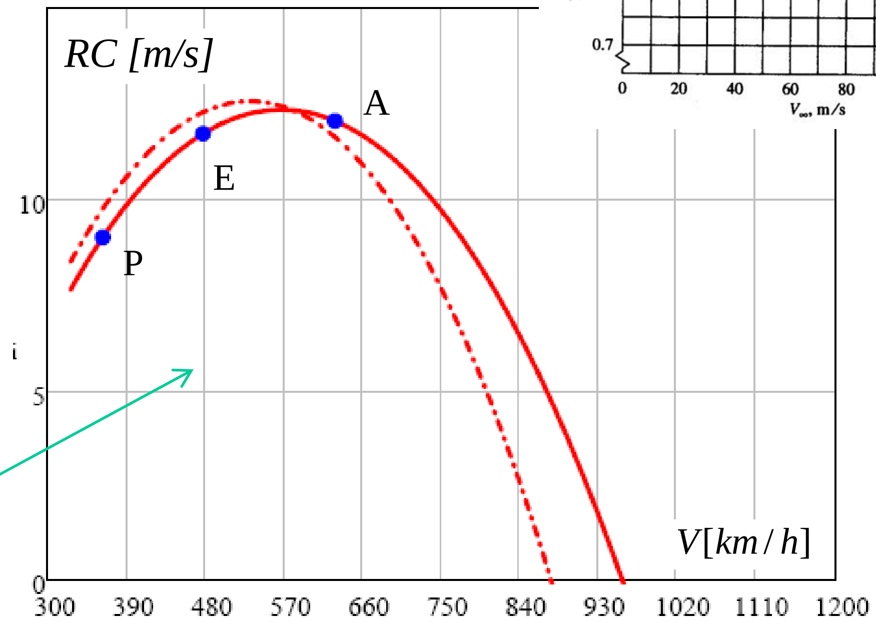
MAX CLIMB Modello esatto

$$\boxed{T = (0.87 \cdot T_o) \cdot K_{MZ}(_{Mach,z}) \cdot \varphi}$$

MAX CLIMB Modello appross (bassa quota)

$$\boxed{T = 0.83 \cdot K_T(V_\infty) \cdot T_o \cdot \varphi \cdot \sqrt{\sigma}}$$

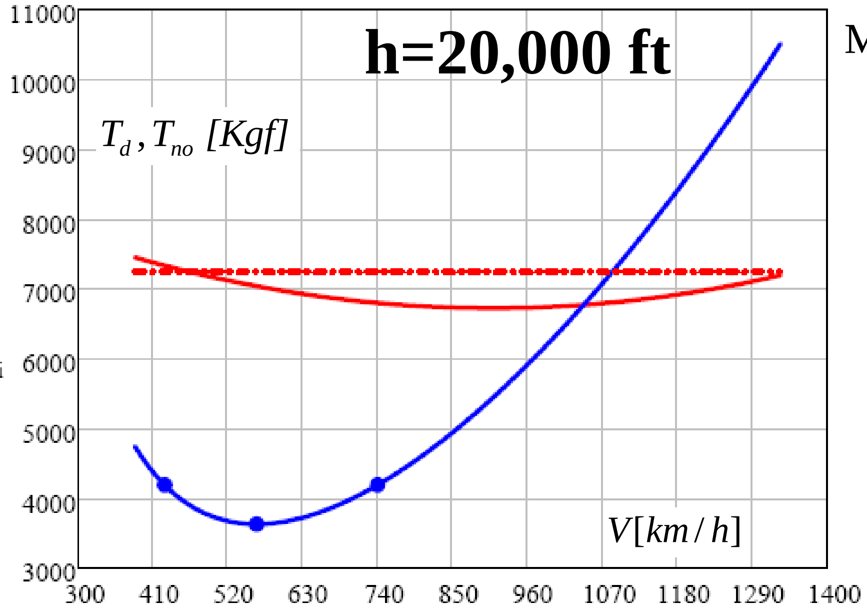




- Il modello approssimato permette di valutare in modo abbastanza accurato il massimo rateo di salita
- Il massimo RC si ha tra E ed A
- Valori del valore massimo intorno ai 12 m/s

Prestazioni di salita – Vel. a getto

h=20,000 ft

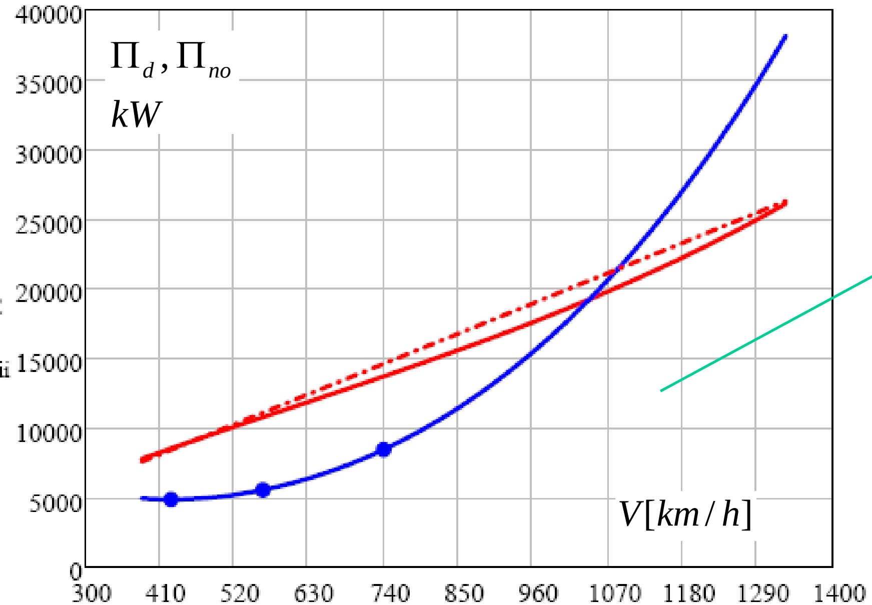


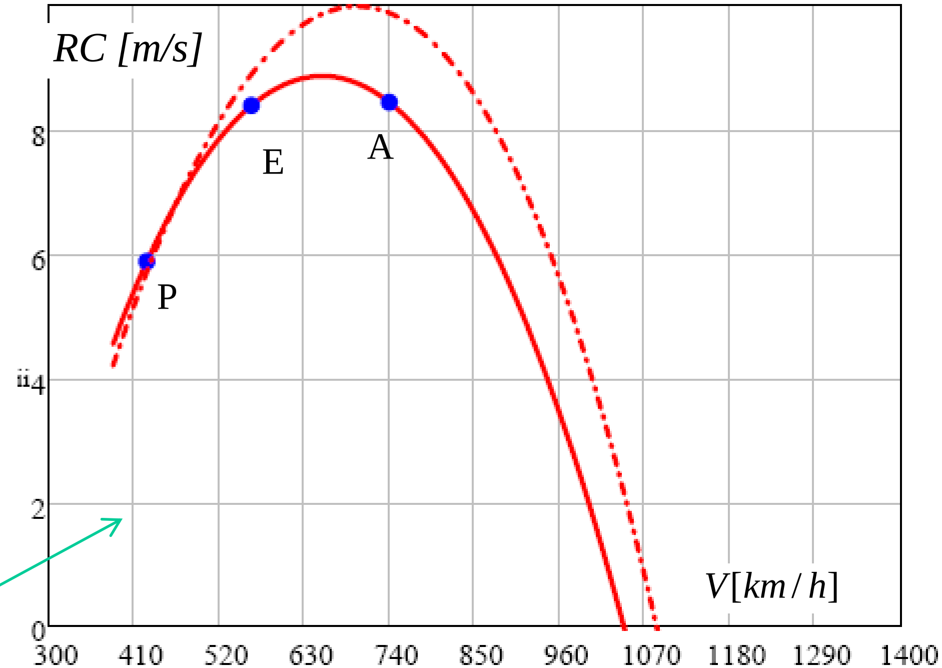
MAX CLIMB Modello motore esatto

$$\boxed{T = (0.87 \cdot T_o) \cdot K_{MZ}(_{Mach,z}) \cdot \varphi}$$

MAX CLIMB Modello appross (alta quota)

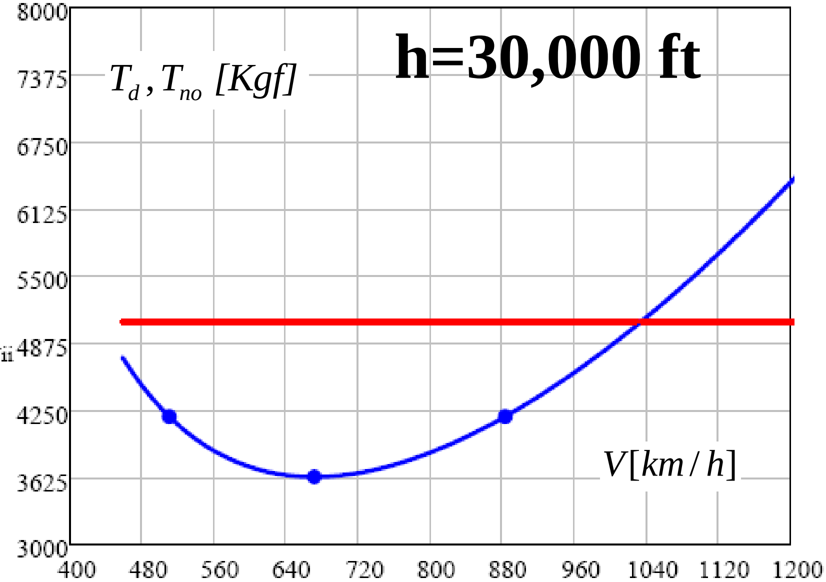
$$\boxed{T = 0.75 \cdot \sigma \cdot T_o \cdot \varphi}$$

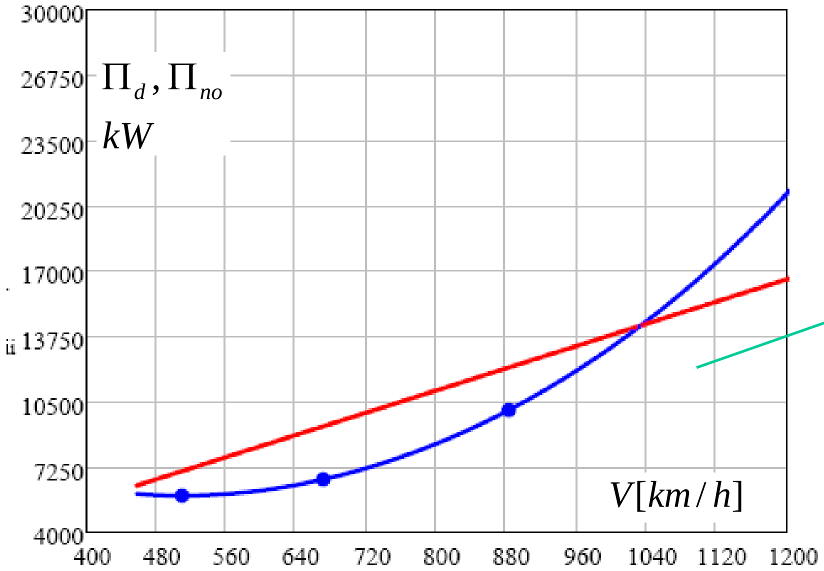




- A questa quota qualche piccola differenza tra modello esatto ed approssimato
- Valori dell’ordine di 9 m/s
- Massimo vicino al punto E

Prestazioni di salita – Vel. a getto

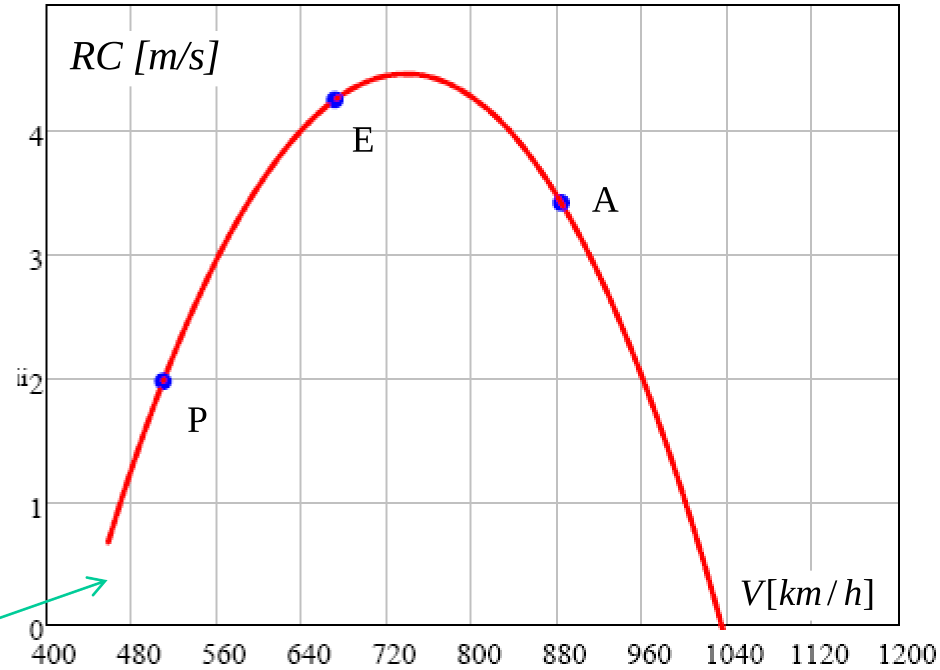




h=30,000 ft

MAX CLIMB Modello esatto (approx)

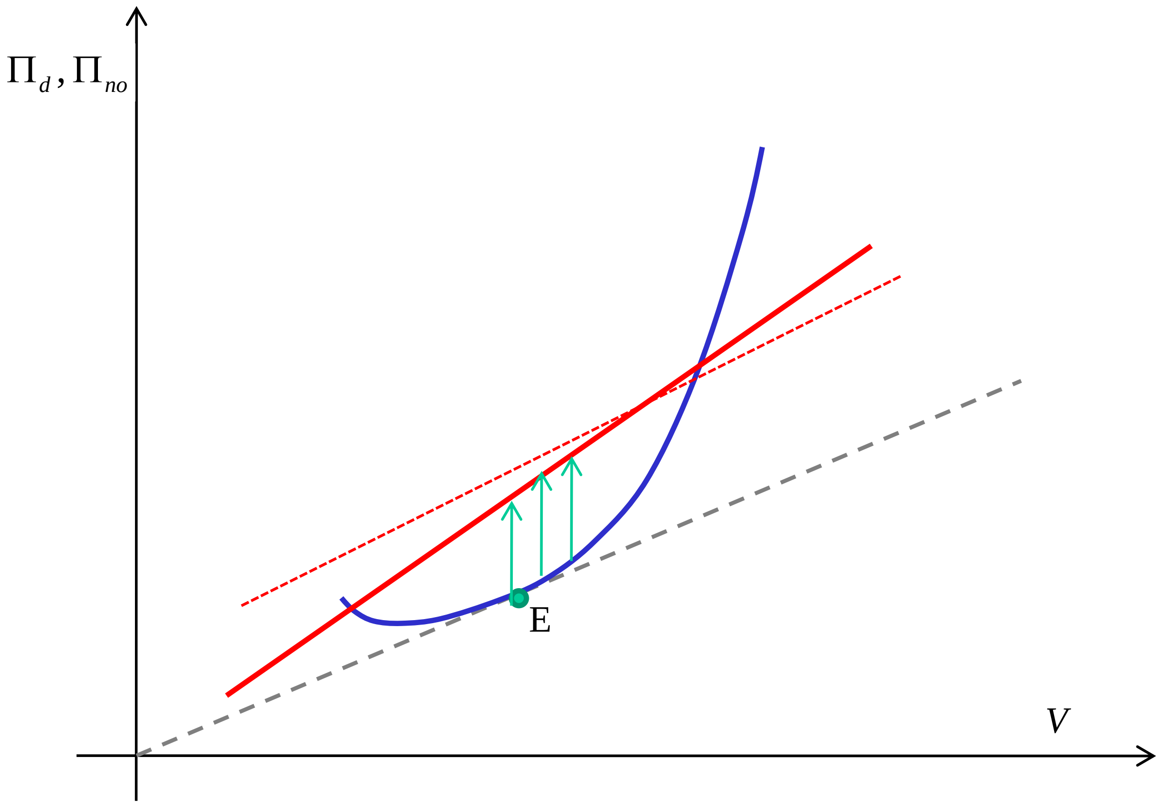
$$\boxed{T = 0.75 \cdot \sigma \cdot T_o \cdot \varphi}$$



- Il massimo RC si ha tra E ed A, ma ad alte quote molto vicino ad E
- Valori del valore massimo intorno ai 4 m/s

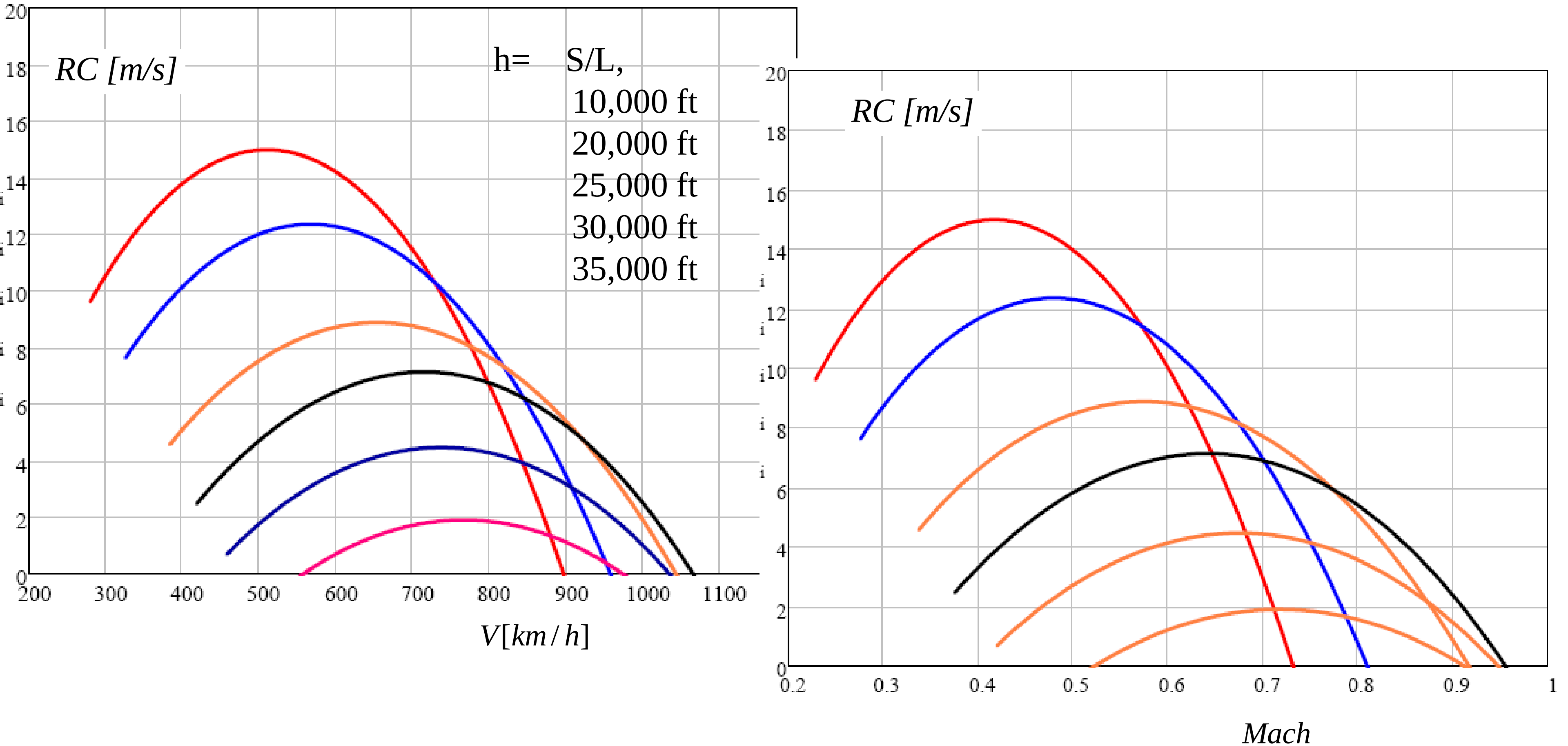
Prestazioni di salita – Vel. a getto

In effetti se la spinta è costante con la velocità (turbofan ad alte quote o turbogetto puro, vedi cap. 6) , l'andamento della potenza disponibile sarà lineare con V e guardando il diagramma si vede **GRAFICAMENTE** come per un velivolo a getto il massimo rateo di salita (proporzionale all'eccesso di potenza) si otterrà ad una velocità molto vicina a quella del punto E. In realtà sarebbe praticamente E se la spinta disponibile (in rosso) fosse perfettamente parallela alla retta passante per l'origine e tangente alla curva della pot. necessaria.



Prestazioni di salita – Vel. a getto

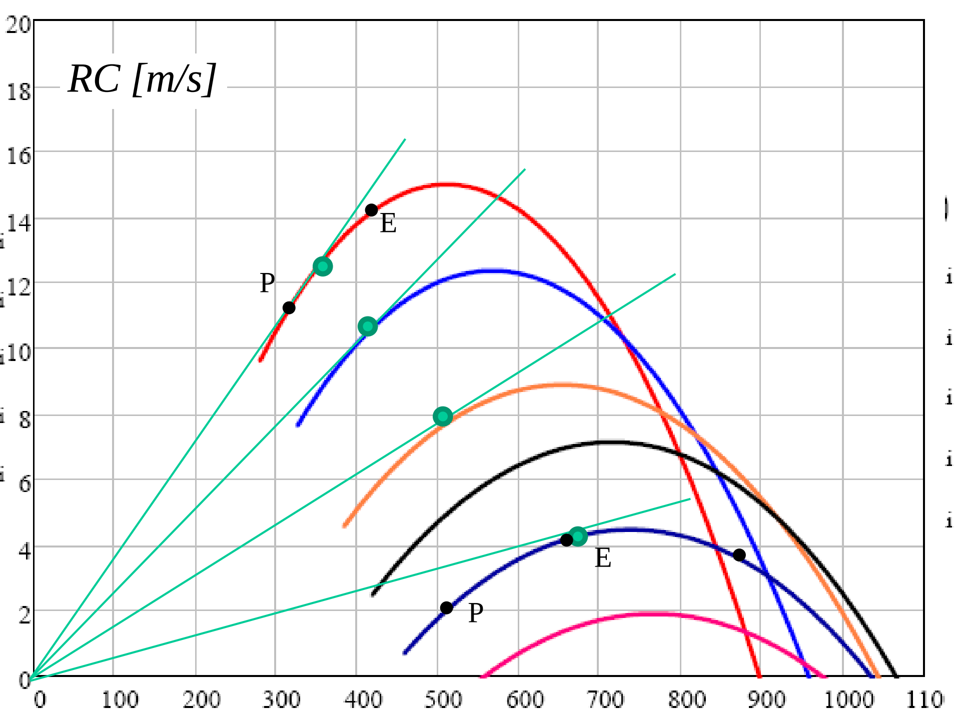
Riportando i grafici del rateo di salita a tutte le quote in un unico grafico si evidenzia come all'aumentare della quota si ha una riduzione di RC ed in particolare del valore massimo. Lo stesso diagramma potrebbe essere riportato in Mach e si evidenzia che il Mach al quale bisogna volare con tale velivolo per avere un massimo rateo di salita è all'incirca pari a 0.50, con valori variabili tra 0.40 (S/L) e 0.60-0.70 (in quota).

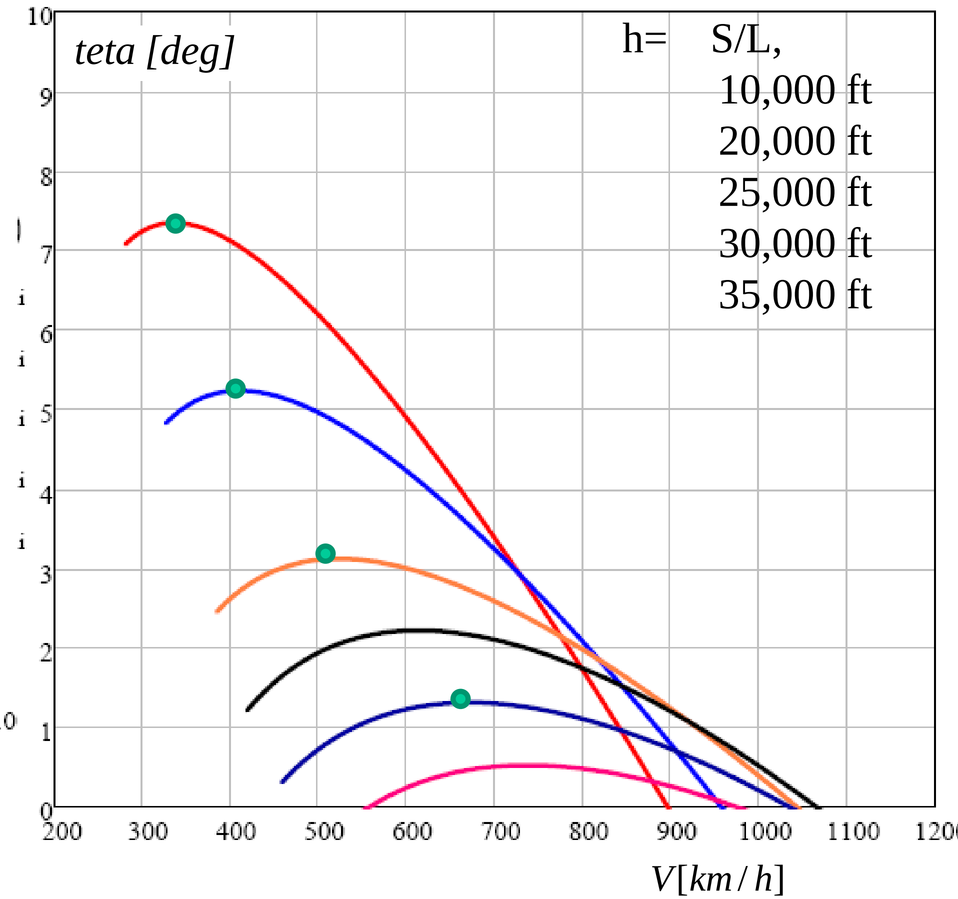


Prestazioni di salita – Vel. a getto

Possono essere riportati anche gli angoli di salita alle varie quote. Anche gli angoli decrescono con la quota. L'angolo massimo (quota h=0) è pari a circa 7.5 gradi.

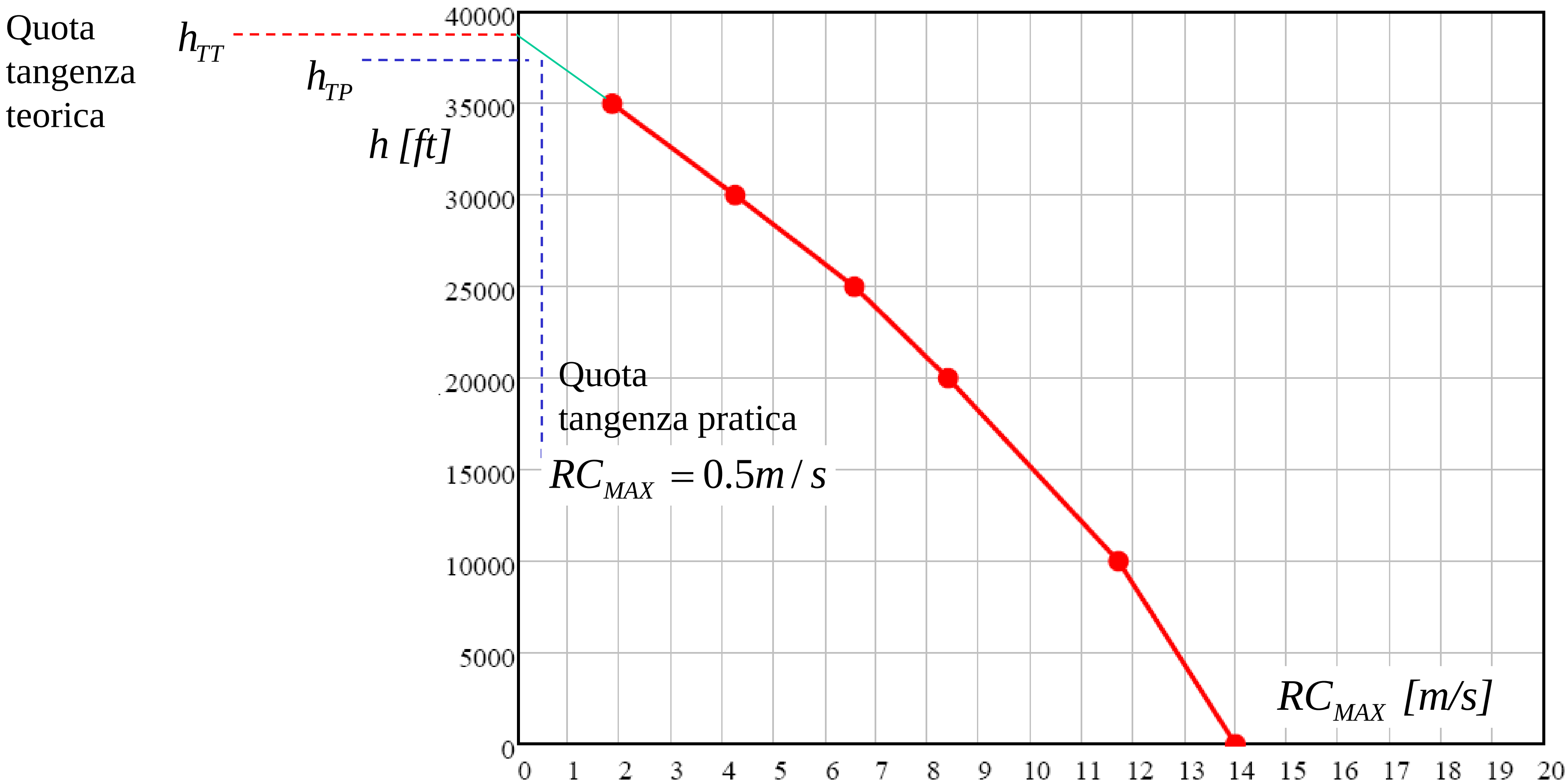
Ricordiamo che l'angolo di salita dipende dall'eccesso di spinta e non dall'eccesso di potenza. La velocità di angolo di salita massimo (velocità o assetto di salita ripida, denominata *Vx*) è minore di quella di massimo rateo (velocità di salita rapida, *Vy*). Alle quote basse il massimo angolo si ottiene tra P ed E ed alle alte quote (es. 30,000 ft) entrambe le velocità sono molto prossime alla velocità del punto E.





Prestazioni di salita – Vel. a getto

Riportando il massimo rateo di salita in funzione della quota otteniamo un diagramma che mostra come (soprattutto dopo una certa quota) ho un andamento abbastanza lineare a decrescere. Per tale velivolo esiste quindi una quota alla quale il massimo rateo è zero e sarà intorno ai 38,000 ft. In effetti tale quota (*detta quota di tangenza teorica*) è praticamente irraggiungibile(infatti il tempo per raggiungerla sarebbe infinito). La quota alla quale il massimo RC è 0.50 m/s (circa 100 ft/min) è detta quota di tangenza pratica e diventa la massima quota operativa per il velivolo.



Prestazioni di salita – Vel. a getto

CONCLUSIONI – Approccio Grafico

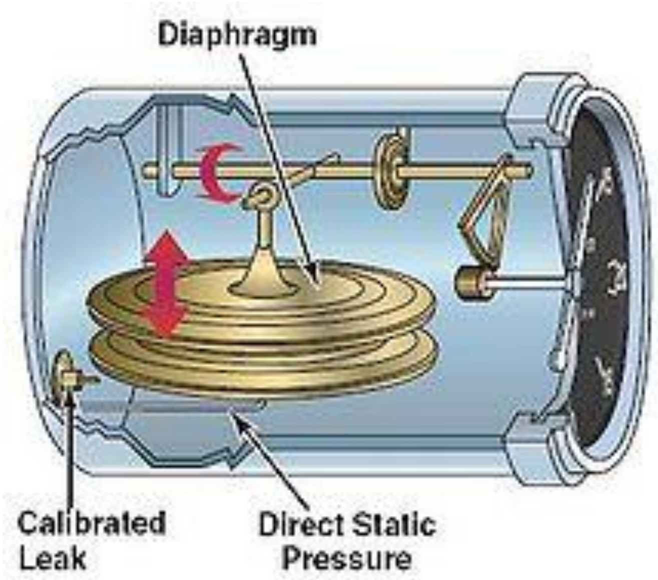
Il massimo RC per un velivolo da trasporto a getto (propulso con motori turbofan HBPR) è dell'ordine dei 15-20 m/s al livello del mare. Il valore del massimo angolo (raggiunto a velocità sulla traiettoria inferiori) è invece tra i 7 ed i 9 gradi. Sia il rateo che l'angolo si riducono all'aumentare della quota, fino al raggiungimento della quota di tangenza teorica (massimo RC=0) o pratica (massimo R=0.5 m/s). Il massimo rateo di salita RC viene ottenuto a velocità abbastanza elevate , come visto nel caso del velivolo a getto a velocità tra quelle del punto E e punto A. Si vedrà successivamente che verrà appunto assunto il punto E per il calcolo.

Riguardo l'angolo, e' bene chiarire che, quando vediamo un velivolo salire dopo il decollo, siamo portati più a vedere l'angolo di assetto del velivolo γ , che può essere invece anche di 17-20 gradi, dato che è pari all'angolo di volta (angolo di salita θ, cioè l'angolo della traiettoria + l'angolo di attacco (che può essere in questa fase anche di 8-10 gradi).

Prestazioni di salita – Vel. a getto

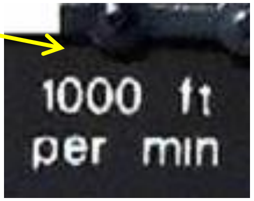
CONCLUSIONI – Considerazioni sulla misura di RC a bordo

E' bene segnalare infine che il rateo di salita viene a bordo misurato dallo strumento detto variometro (Vertical Speed Indicator) che misura tale velocità sulla base della misura della variazione nel tempo della quota pressione. L'unità di misura maggiormente usata è però quella dei [ft/min]. Si ricorda che 1 m/s => circa 197 ft/min. Quindi il limite di 0.50 è pari a circa 100 ft/min. Nel caso del velivolo MD-80 avremmo un massimo Rc al livello del mare di 15 m/s corrispondenti a circa 3000 ft/min.



10 m/s => circa 2000 ft/min

Ad esempio tale strumento misura fino a 2000 ft/min



Prestazioni di salita – Vel. ad elica

Consideriamo sempre il velivolo Beechcraft King Air C90.

W=4380 Kg   peso massimo al decollo

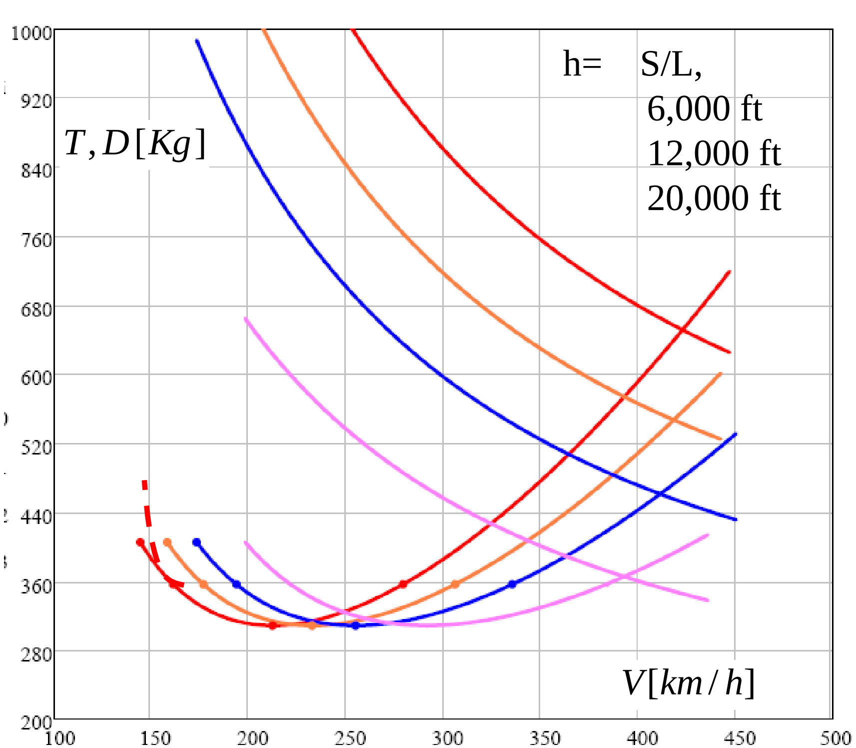
S= 27.3 m2   b=15.3 m   AR=8.57

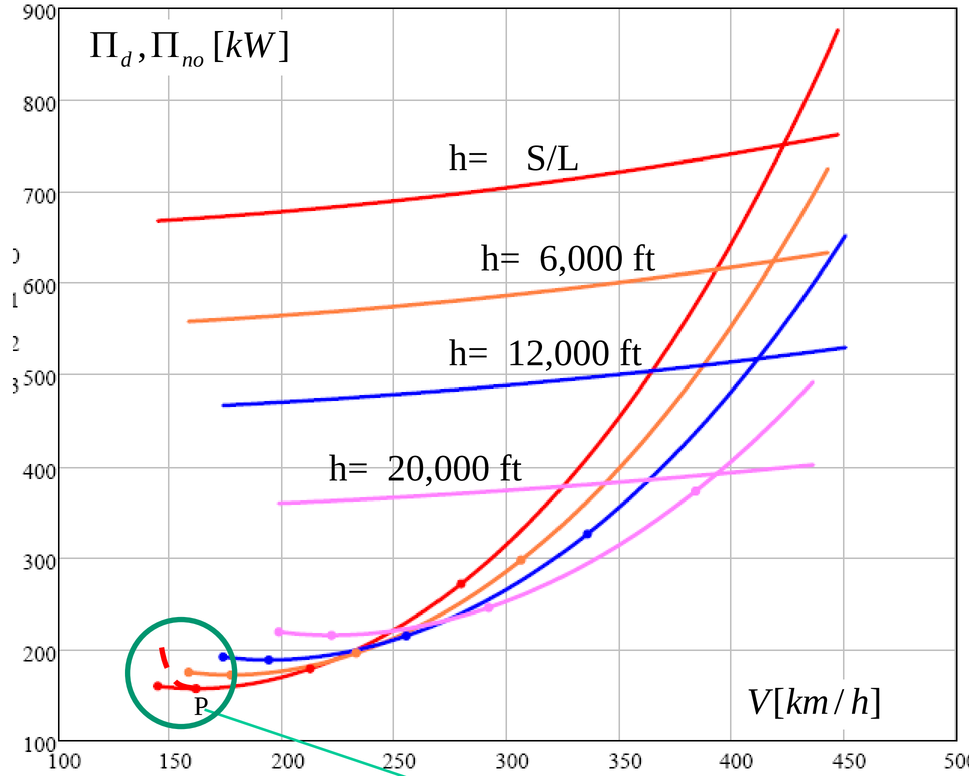
CDo=0.026 e=0.78   CLMAX=1.6

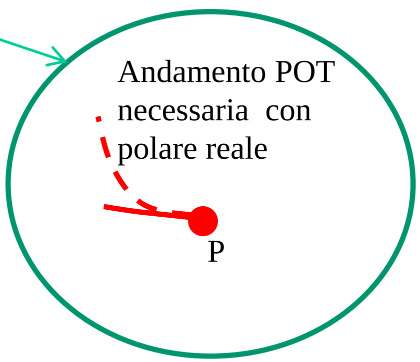
2 Motori Pratt&Withney PT6A21 , ciascuno da 550 hp all'albero. I motori sono turboelica. Rendimento prop. delle eliche $\eta_P = 0.80$.

Quote considerate : S/L, 12,000 ft, 20,000 ft

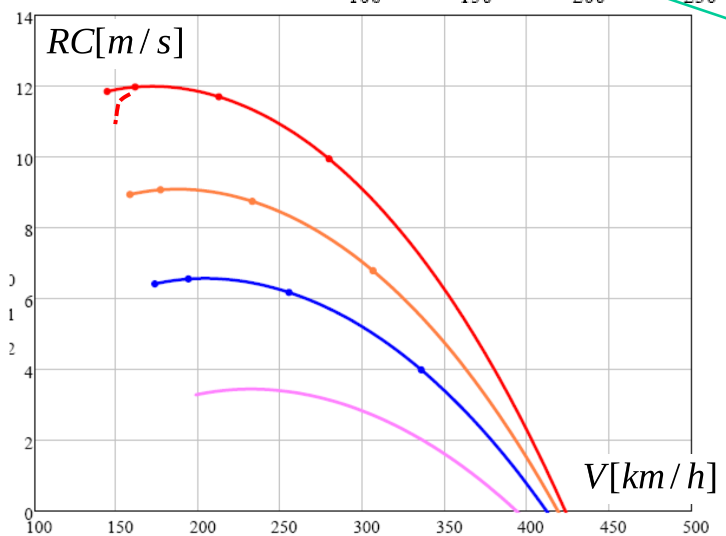
Prestazioni di salita – Vel. ad elica





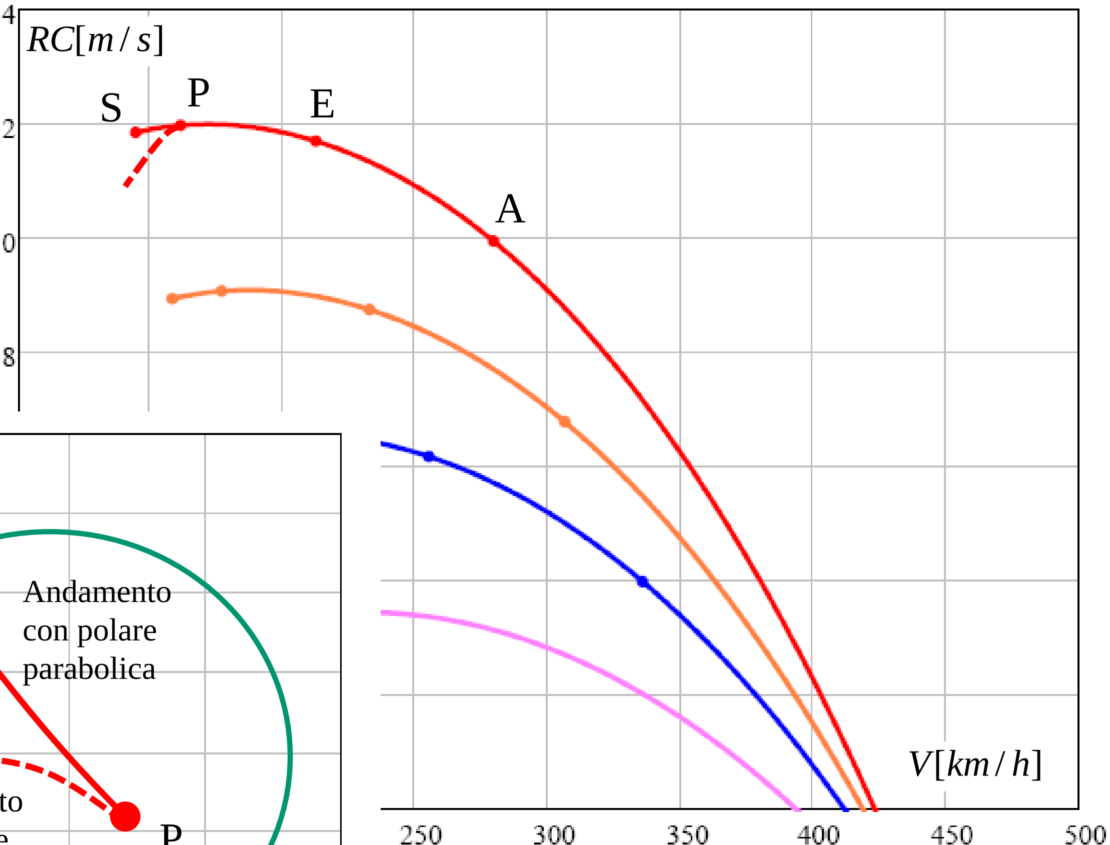


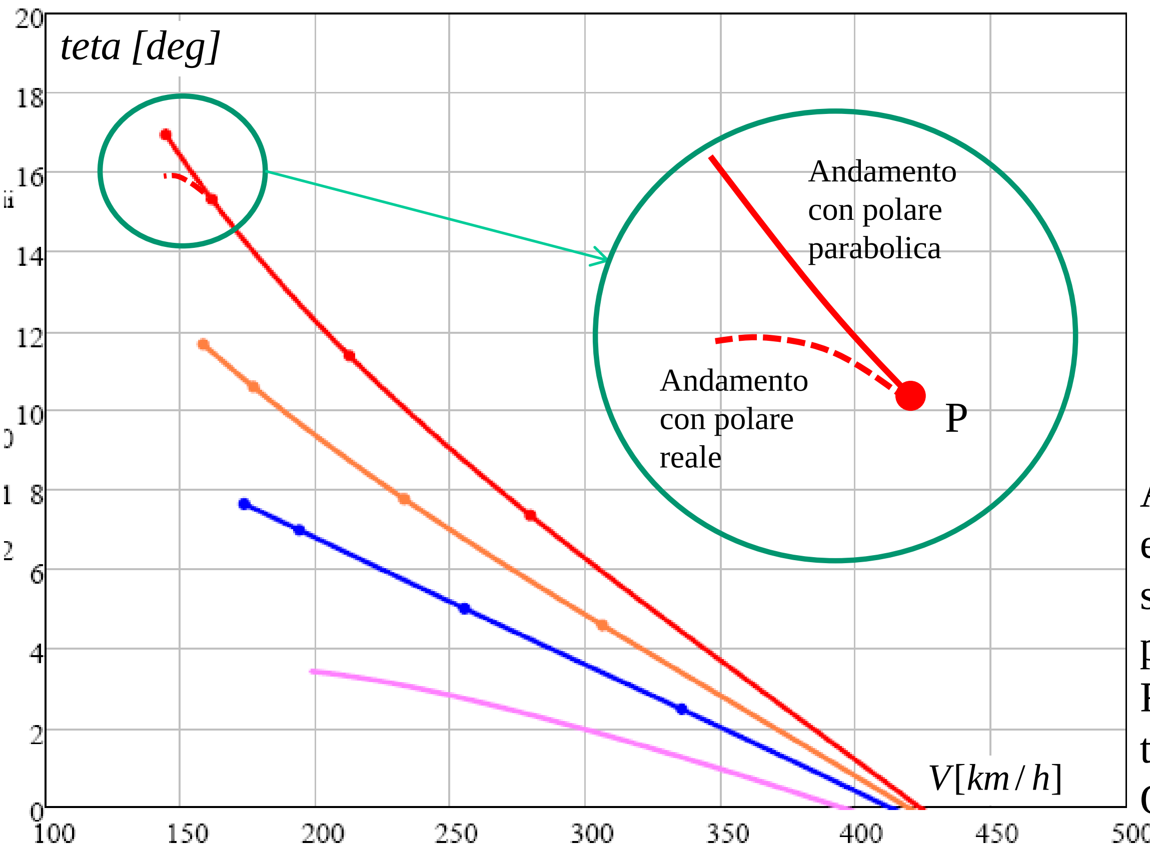
Si deve notare che per V minori del punto P (cioè tra P ed S, stallo) le curve deviano da quelle relative alla polare parabolica



Prestazioni di salita – Vel. ad elica

- Rateo di salita massimo S/L pari a 12 m/s (circa 2400 ft/min)
- Angolo di salita massimo a S/L dell'ordine di 16-17 deg (> del jet)
- Assetto di salita rapida (max RC) praticamente coincidente con il punto **P**

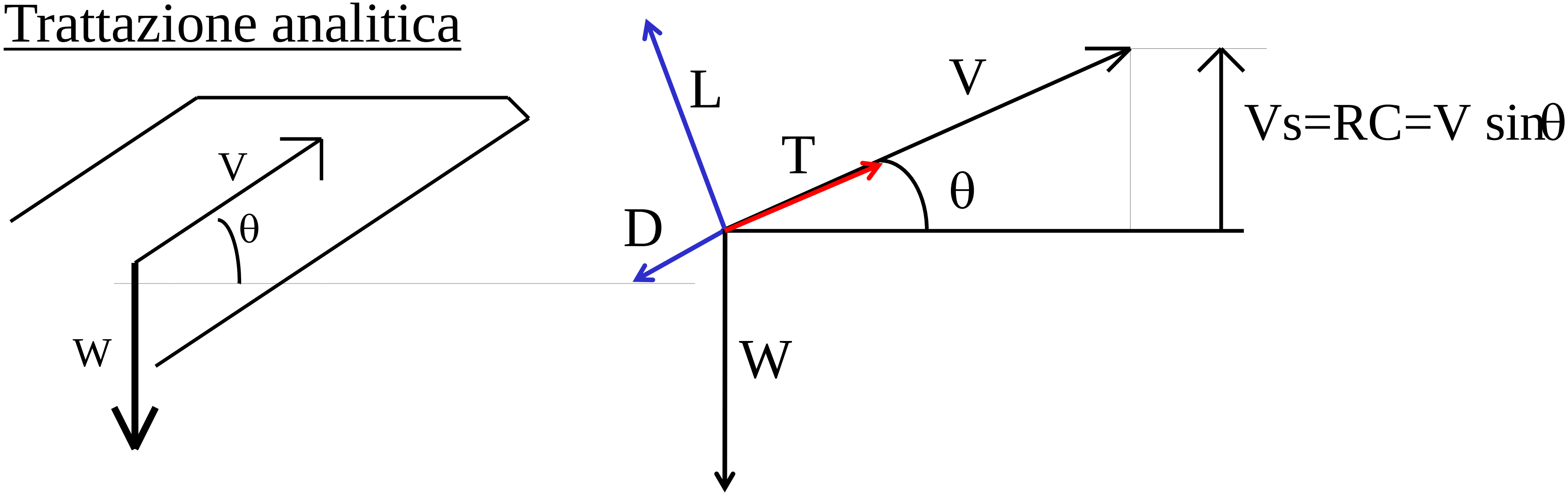




Attenzione che a sx del punto P (cioè tra P ed S) la resistenza e la potenza necessarie sono sottostimate perché la polare non è più parabolica. L'andamento corretto del RC e dell'angolo sono riportati tratteggiati.
Quindi angolo max tra P ed S.

Prestazioni di salita

Trattazione analitica



Equilibrio (ASSI VENTO)

Asse x $T - D - W \cdot sen\theta$

Asse z $L - W \cdot \cos\theta$

$$RC = V \cdot sen\theta = \frac{T \cdot V - D \cdot V}{W}$$

La velocità di salita (detta anche rateo di salita, in ingl. Rate of Climb (RC)):

$$V_h = RC = V \cdot sen\theta$$

$\sin\theta = \frac{T - D}{W}$

$$RC = V \cdot sen\theta = \frac{T \cdot V - D \cdot V}{W} = \frac{\Pi_d - \Pi_{no}}{W}$$

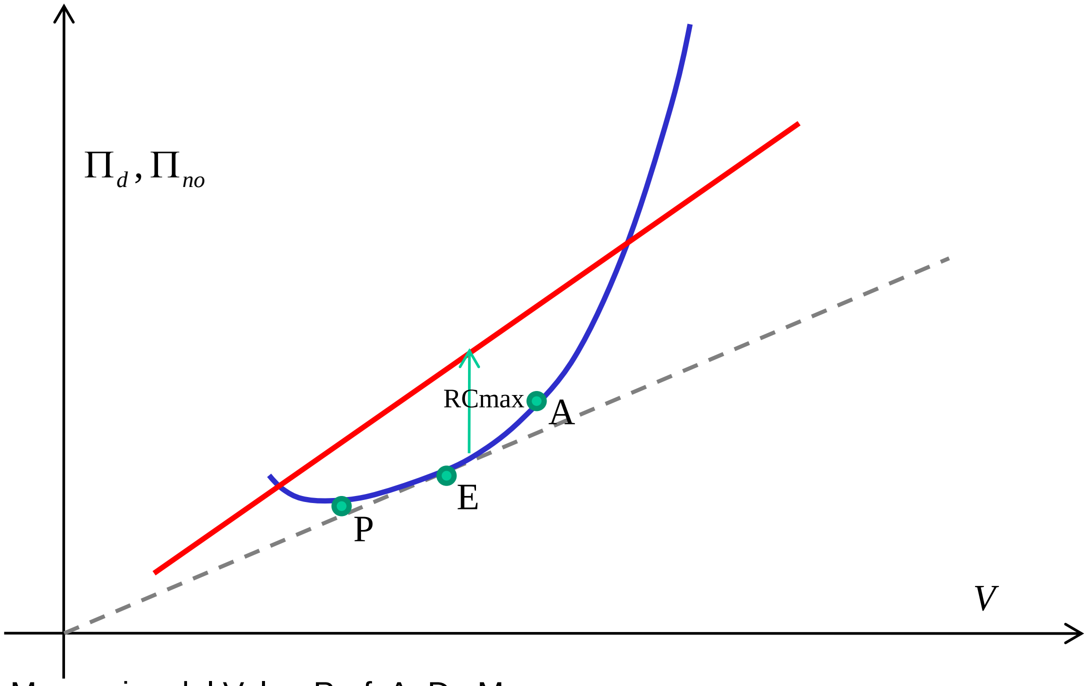
vediamo ora le differenze per velivoli propulsi ad elica e velivoli a getto.

$$RC = V\sin\theta = \frac{TV}{W} - \frac{DV}{W}$$

$$D = q\,S\,(CDo + K\,CL^2) = q\,S\left[CDo + K\cdot\left(\frac{W}{qS}\right)^2\right] = q\,S\,CDo + K\,\frac{W^2}{qS}$$

$$RC = V\left[\frac{T}{W} - q\frac{S}{W}CDo - \frac{W}{S}\frac{2K}{\rho V^2}\right]$$

Nel caso del velivolo a getto, data la tendenza (quasi lineare) dell'andamento della potenza disponibile, il massimo RC si avrà ad assetti prossimi a quelli del punto E.



Approccio approssimato

Un primo (approssimato) approccio analitico consiste nel calcolare il massimo rateo di salita ad una certa quota all'assetto di massima efficienza.

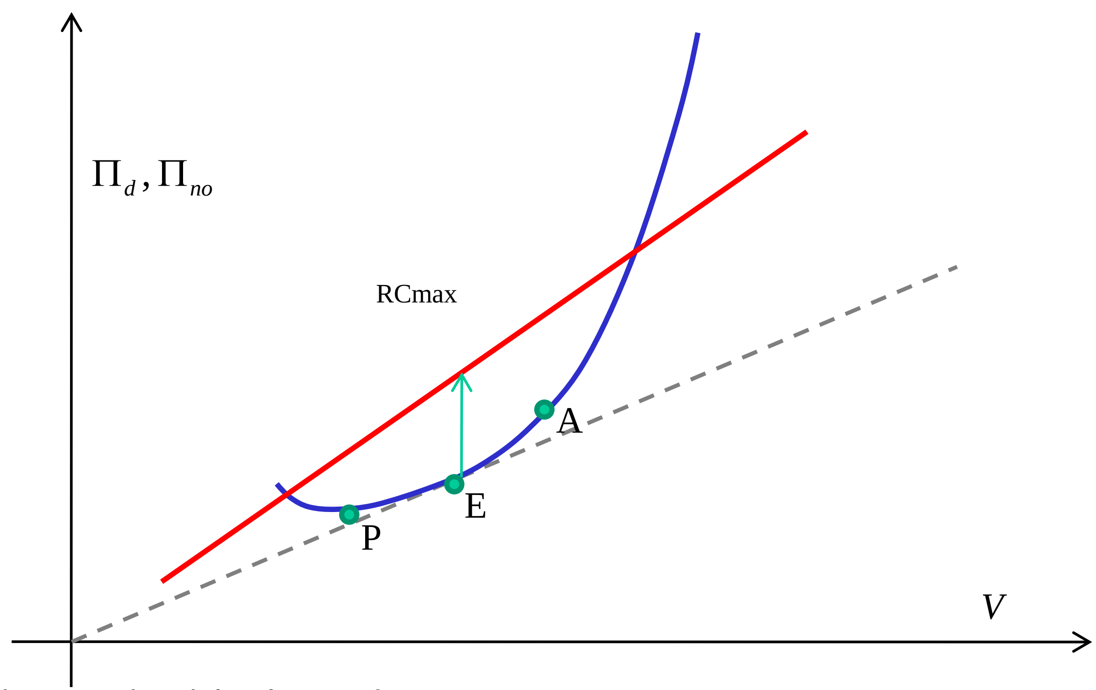
$$RC_{MAX} = \frac{T_d \cdot V_E - D_E \cdot V_E}{W} = T_d \frac{V_E}{W} - \frac{\Pi_E}{W}$$

Ed il corrispondente angolo salita (che non è il max angolo):

$$\theta_{RC\_MAX} = \frac{T_d - D_E}{W}$$

con θ espresso in radianti.
Per avere i gradi moltiplicare per 57.3.

Ovviamente anche la spinta disponibile va valutata alla velocità V_E



Approccio analitico esatto (nell'ipotesi di $T=T_d$ costante con V)

$$\frac{d(RC)}{dV}=0 \qquad RC=\frac{TV-DV}{W} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{W}\cdot\left[T-D-V\cdot\frac{d(D)}{dV}\right]=0$$

- D/W

$$\frac{T}{W}-\frac{\rho_o\sigma f}{2W}V^2-\frac{2}{\pi\rho_o\sigma}\left(\frac{W}{b_e^{\,2}}\right)\frac{1}{V^2}-\frac{\rho_o\sigma f}{W}V^2+\frac{4}{\pi\,\rho_o\sigma}\left(\frac{W}{b_e^{\,2}}\right)\frac{1}{V^2}=0$$

$$6\,f\,q^2-2\,T\,q-\frac{2}{\pi}\left(\frac{W}{b_e}\right)^2=0$$

$$q_{RCMAX}=\frac{T}{6f}\left[1+\sqrt{1+\frac{3}{E_{MAX}^{\;2}\left(\frac{T}{W}\right)^2}}\right]=\frac{T}{6f}\Gamma$$

$$\Gamma=\left[1+\sqrt{1+\frac{3}{E_{MAX}^{\;2}\left(\frac{T}{W}\right)^2}}\right]$$

Approccio analitico esatto (nell'ipotesi di T=T_d costante con V)

$$\Gamma = \left[1 + \sqrt{1 + \frac{3}{E_{MAX}^{2}\left(\frac{T}{W}\right)^{2}}} \right]$$

Il fattore Γ è pari a circa 2, in quanto il denominatore è solitamente >>3 e quindi la radice è circa 1.

In corrispondenza della quota di tangenza

$$\frac{T}{W} = \frac{1}{E_{max}}$$

e Γ=3 (e si ha la velocità di salita rapida limite (di fatto con RC=0).

$$q_{RCMAX} = q_{fc} = \frac{T}{6\,f}\,\Gamma$$

fc sta per "fastest climb"

$$V_{RCMAX} = V_{fc} = \sqrt{\frac{2 \cdot q_{fc}}{\rho}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{T \cdot \Gamma}{6 f}} = \sqrt{\frac{T \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot f}}$$

Approccio esatto

$$V_{RCMAX} = V_{fc} = \sqrt{\frac{2 \cdot q_{fc}}{\rho}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{T \cdot \Gamma}{6 f}} = \sqrt{\frac{T \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot f}}$$

RICORDIAMO che il rateo di salita è :

$$RC_{MAX} = \frac{T_d \cdot V_{fc} - D_{fc} \cdot V_{fc}}{W} = \theta_{fc} \cdot V_{fc}$$

Ricaviamo l'espressione generica di D/W

$$\frac{D}{W} = \frac{qS}{W}\left(CDo + CDi\right)$$

$$\frac{D}{W} = \frac{qS}{W}\left(CDo + \frac{CL^2}{\pi A \mathrm{Re}}\right) \qquad CL = \frac{W}{qS} \qquad \frac{D}{W} = \frac{qS}{W}\left(CDo + \frac{1}{q^2}\left(\frac{W}{S}\right)^2 \frac{1}{\pi A \mathrm{Re}}\right)$$

$$\frac{D}{W} = \frac{qS}{W} \cdot CDo + \frac{1}{q}\frac{W}{S}\frac{1}{\pi \cdot AR \cdot e}$$

Approccio esatto

$$\frac{D}{W}=\frac{qS}{W}\cdot CDo+\frac{1}{q}\frac{W}{S}\frac{1}{\pi\cdot AR\cdot e}$$

Ma ricordo che :

$$E_{MAX}=\sqrt{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{AR\cdot e}{CDo}} \quad => \quad \pi\cdot \mathrm{AR}\cdot \mathrm{e}=4\cdot \mathrm{CDo}\cdot E_{MAX}{}^{2}$$

Sostituendo a q $\quad q_{RCMAX}=\frac{T}{6\,\mathrm{f}}\Gamma$

$$\left(\frac{D}{W}\right)_{fc}=\left(\frac{T}{6f}\right)\Gamma\frac{f}{W}+\left(\frac{6f}{T}\right)\frac{1}{\Gamma}\frac{W}{S}\frac{1}{4\cdot CDo\cdot E_{MAX}{}^{2}}$$

$$\left(\frac{D}{W}\right)_{fc}=\left(\frac{T}{W}\right)\frac{\Gamma}{6}+6\left(\frac{W}{T}\right)\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{1}{4\cdot E_{MAX}{}^{2}}\right)$$

Approccio esatto

$$\left(\frac{D}{W}\right)_{fc} = \left(\frac{T}{W}\right)\frac{\Gamma}{6} + 6\left(\frac{W}{T}\right)\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{1}{4\cdot E_{MAX}{}^{2}}\right)$$

$$\left(\frac{D}{W}\right)_{fc} = \left(\frac{T}{W}\right)\frac{\Gamma}{6} + \frac{3}{2\cdot\Gamma}\left(\frac{1}{\left(\frac{T}{W}\right)\cdot E_{MAX}{}^{2}}\right)$$

Ma

$$\theta_{fc} = \frac{T}{W} - \left(\frac{D}{W}\right)_{fc} = \frac{T}{W}\left(1-\frac{\Gamma}{6}\right) - \frac{3}{2\cdot\Gamma}\frac{1}{\left(\frac{T}{W}\right)\cdot E_{MAX}{}^{2}}$$

$$RC_{MAX} = \theta_{fc}\cdot V_{fc} = \left\{\frac{T}{W}\left(1-\frac{\Gamma}{6}\right) - \frac{3}{2\cdot\Gamma}\frac{1}{\left(\frac{T}{W}\right)\cdot E_{MAX}{}^{2}}\right\}\left(\sqrt{\frac{T\cdot\Gamma}{3\cdot\rho\cdot f}}\right)$$

Approccio esatto

Con la nuova espressione per la V

$$V_{fc} = \left(\sqrt{\frac{T \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot f}} \right) = \sqrt{\frac{\Gamma}{3 \cdot \rho_o \cdot \sigma \cdot CDo} \frac{T}{S}} = \sqrt{\frac{\Gamma}{3 \cdot \rho_o \cdot \sigma \cdot CDo}} \sqrt{\frac{T}{S}}$$

$$V_{fc} = \sqrt{\frac{\Gamma}{3 \cdot \rho_o \cdot \sigma \cdot CDo}} \sqrt{\frac{T}{W}} \sqrt{\frac{W}{S}}$$

$$RC_{MAX} = \theta_{fc} \cdot V_{fc} = \left\{ \frac{T}{W} \left(1 - \frac{\Gamma}{6} \right) - \frac{3}{2 \cdot \Gamma} \frac{1}{\left(\frac{T}{W} \right) \cdot E_{MAX}{}^{2}} \right\} \left(\sqrt{\frac{\Gamma}{3 \rho \cdot CDo}} \sqrt{\frac{T}{W}} \sqrt{\frac{W}{S}} \right)$$

$$\boxed{\mathrm{RC_{MAX}} = \left[\frac{(\mathrm{W/S}) \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot \mathrm{CDo}} \right]^{1/2} \cdot \left(\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{W}} \right)^{3/2} \cdot \left[1 - \frac{\Gamma}{6} - \frac{3}{2 \cdot (\mathrm{T/W})^{2} \cdot \left(\mathrm{E_{MAX}} \right)^{2} \cdot \Gamma} \right]}$$

Prestazioni di salita

$$RC_{MAX} = \left[\frac{(W/S) \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot CDo} \right]^{1/2} \cdot \left(\frac{T}{W} \right)^{3/2} \cdot \left[1 - \frac{\Gamma}{6} - \frac{3}{2 \cdot (T/W)^2 \cdot (E_{MAX})^2 \cdot \Gamma} \right]$$

$$\Gamma = \left[1 + \sqrt{1 + \frac{3}{E_{MAX}{}^2 \left(\frac{T}{W} \right)^2}} \right]$$

Il massimo rateo di salita RC_{MAX} dipende da:

- da W/S (carico alare) e cresce al crescere di esso
- dal rapporto spinta / peso (in modo forte)
- dal CDo (cresce al ridursi del CDo)
- dall'efficienza massima

E' importante notare come aumentare il carico alare (ad esempio riducendo la superficie alare) per un velivolo a getto equivale ad aumentare sia la velocità massima (e la velocità di crociera) sia il massimo rateo di salita del velivolo.

Questo avviene perché riducendo S si riduce la superficie bagnata e così si riduce la resistenza parassita (di attrito) importante alle alte velocità.

Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

$$RC_{MAX} = \left[\frac{(W/S)\cdot\Gamma}{3\cdot\rho\cdot CDo}\right]^{1/2} \cdot \left(\frac{T}{W}\right)^{3/2} \cdot \left[1 - \frac{\Gamma}{6} - \frac{3}{2\cdot(T/W)^2\cdot(E_{MAX})^2\cdot\Gamma}\right]$$

Assumendo Γ=2 (che come visto vale vicino a quote basse, prossime a zero)

$$RC_{MAX} = \left[\frac{(W/S)\cdot 2}{3\cdot\rho\cdot CDo}\right]^{1/2} \cdot \left(\frac{T}{W}\right)^{3/2} \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2\cdot(T/W)^2\cdot(E_{MAX})^2\cdot 2}\right]$$

$$RC_{MAX} = \sqrt{\frac{2}{3\cdot\rho_0}}\,\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sqrt{\frac{W}{S\cdot CDo}}\cdot\sqrt{\frac{T}{W}}\left(\frac{T}{W}\right)\cdot\left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2\cdot(T/W)^2\cdot(E_{MAX})^2\cdot 2}\right]$$

$$E_{MAX} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{b_e^{\,2}}{f}} \quad => \quad E_{MAX}^{\;2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{b_e^{\,2}}{f}$$

$$RC_{MAX} = \sqrt{\frac{2}{3\cdot\rho_0}}\,\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sqrt{\frac{W}{S\cdot CDo}}\cdot\sqrt{\frac{T}{W}}\left(\frac{T}{W}\right)\cdot\left[\frac{2}{3} - \frac{3\cdot f}{(T/W)^2\cdot\pi\cdot b_e^{\,2}}\right]$$

Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

$$RC_{MAX} = \sqrt{\frac{2}{3\cdot\rho_0}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sqrt{\frac{W}{f}}\cdot\sqrt{\frac{T}{W}}\left(\frac{T}{W}\right)}\cdot\left[\frac{2}{3}-\frac{3\cdot f}{(T/W)^2\cdot\pi\cdot b_e^{\ 2}}\right]$$

$$RC_{MAX} = \sqrt{\frac{2}{3\cdot\rho_0}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sqrt{\frac{T}{f}}\left(\frac{T}{W}\right)}\cdot\left[\frac{2}{3}-\frac{3\cdot f}{(T/W)^2\cdot\pi\cdot b_e^{\ 2}}\right]$$

$$RC_{MAX} = \sqrt{\frac{2}{3\cdot\rho_0}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sqrt{\frac{T}{f}}\left(\frac{T}{W}\right)}\cdot\left[\frac{2}{3}-\frac{3}{\pi}\left(\frac{f}{T}\right)\left(\frac{W}{T}\right)\frac{W}{b_e^{\ 2}}\right]$$

$$RC_{MAX} = \left[\sqrt{\frac{2}{3\rho_0}\frac{2}{3}}\right]\cdot\left(\frac{T}{W}\right)\sqrt{\frac{T}{f}}\ \frac{1}{\sqrt{\sigma}}-\left(\frac{T}{W}\right)\sqrt{\frac{T}{f}}\frac{1}{\left(\frac{T}{W}\right)}\frac{1}{\left(\frac{T}{f}\right)}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{W}{b_e^{\ 2}}\right)\left[\sqrt{\frac{2}{3\rho_0}\frac{3}{\pi}}\right]$$

$$\boxed{RC_{MAX} = 1.54\left(\frac{T}{W}\right)\sqrt{\frac{T}{f}}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}-2.2\frac{\left(\frac{W}{b_e^{\ 2}}\right)}{\sqrt{\frac{T}{f}}\sqrt{\sigma}}}$$

Con T e W espresse in Kg

Prestazioni di salita

$$RC_{MAX} = \left[\frac{(W/S)\cdot\Gamma}{3\cdot\rho\cdot CDo}\right]^{1/2} \cdot \left(\frac{T}{W}\right)^{3/2} \cdot \left[1 - \frac{\Gamma}{6} - \frac{3}{2\cdot(T/W)^2\cdot(E_{MAX})^2\cdot\Gamma}\right]$$

Quindi siamo arrivati ad un'espressione approssimata (Γ=2)
e utilizzando forze espresse in [Kg]

$$\boxed{RC_{MAX} = 1.54\left(\frac{T}{W}\right)\sqrt{\frac{T}{f}}\frac{1}{\sqrt{\sigma}} - 2.2\frac{\left(\frac{W}{b_e^{\,2}}\right)}{\sqrt{\frac{T}{f}}\sqrt{\sigma}}}$$

Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

$$RC_{MAX} = 1.54\left(\frac{T}{W}\right)\sqrt{\frac{T}{f}}\frac{1}{\sqrt{\sigma}} - 2.2\frac{\left(\frac{W}{b_e^{\,2}}\right)}{\sqrt{\frac{T}{f}}\sqrt{\sigma}}$$

Con T e W espresse in Kg

W=WTO =63500 Kg peso massimo al decollo
S=112 m^2 b=33 m AR=9.72 CDo=0.020 e=0.80
Imp. propulsivo : 2 motori PW JT8D da 9072 Kg di spinta ciascuno, cioè To=18144 Kg

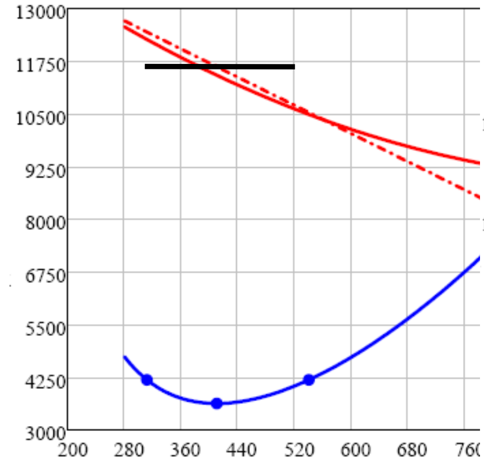
$$RC_{MAX} = 1.54(0.28)\sqrt{\frac{18144}{2.24}}\frac{1}{\sqrt{1}} - 2.2\frac{\left(\frac{63500}{871.2}\right)}{\sqrt{\frac{18144}{2.24}}\sqrt{1}} = 38.8 - 1.78 = 37 \;\; m/s$$

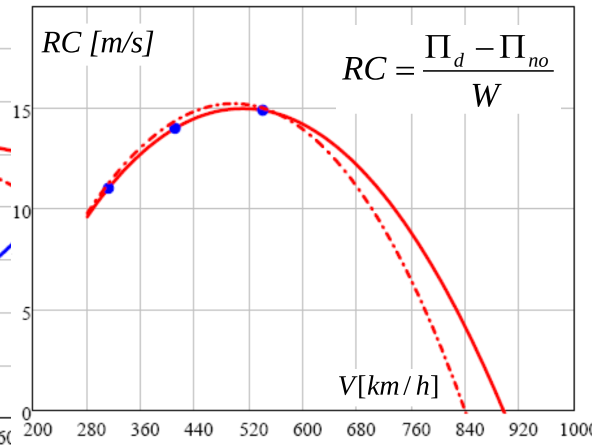
Valori molto elevati e non verosimili perché la spinta disp. non può essere considerata pari alla spinta statica !
Anche ipotizzando una riduzione pari a 0.87, i valori sono alti rispetto a quelli reali.
Il motivo è che bisogna tenere in conto il fattore Kmz del turbofan che riduce la spinta con la velocità di volo.

Prestazioni di salita — Trattazione analitica – VEL GETTO

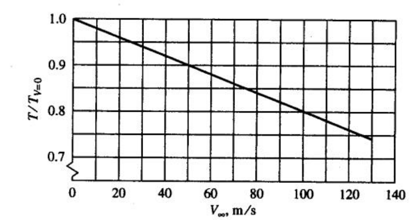
$$RC_{MAX} = 1.54\left(\frac{T}{W}\right)\sqrt{\frac{T}{f}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} - 2.2\frac{\left(\dfrac{W}{b_e^{\,2}}\right)}{\sqrt{\dfrac{T}{f}\sqrt{\sigma}}}$$

$$T_{d\_Climb} = 0.83\cdot\sqrt{\sigma}\cdot K_T(V_\infty)\cdot T_o\cdot\varphi$$





Rispetto al calcolo precedente andrebbe però considerato un valore di T diverso da To. Infatti dal grafico della spinta di un turbofan a livello del mare (S/L) in funzione della velocità (del Mach) si vede che, assumendo la velocità del punto E ed applicando la formula (in pratica è come assumere spinta disponibile costante intorno a quel punto e pari a quella calcolata in E), si ha, nel caso del velivolo MD-80:



$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho_0}\frac{W}{S}\frac{1}{C_{L_E}}} = 114\ m/s = 410\ Km/h \qquad K_T = 0.77$$

$$T_d = 11627\ Kgf \qquad \frac{T_d}{W} = 0.183$$

$$RC_{MAX} = 1.54(0.18)\sqrt{\frac{11627}{2.24}\frac{1}{\sqrt{1}}} - 2.2\frac{(72.9)}{72} = 19.9 - 2.2 = 17.7\ m/s$$

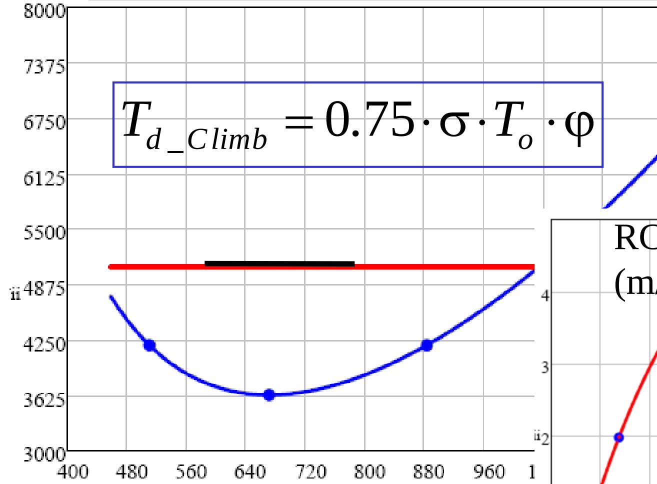
Valore in accordo con il dato ottenuto precedentemente per via grafica (circa 15 m/s vedi sopra)

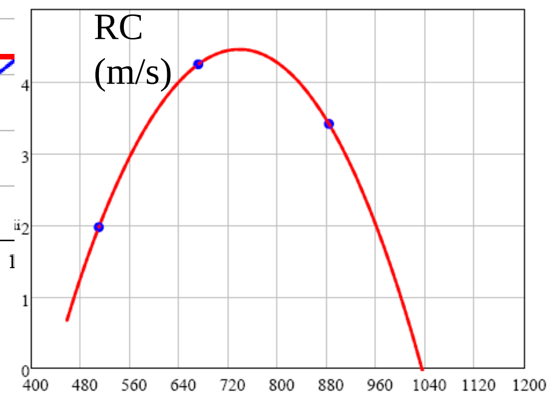
Il primo termine a quote basse è molto più influente del secondo.

Prestazioni di salita

Trattazione analitica – VEL GETTO

$$RC_{MAX} = 1.54\left(\frac{T}{W}\right)\sqrt{\frac{T}{f}}\frac{1}{\sqrt{\sigma}} - 2.2\frac{\left(\frac{W}{b_e^2}\right)}{\sqrt{\frac{T}{f}}\sqrt{\sigma}}$$





A quote elevate:

A quote elevate, ad esempio 30,000 ft, assumendo il modello di motore turbofan visto, sempre nel caso del velivolo MD-80 :

$$T_{d\_Climb} = 0.75\cdot 0.374\cdot 18144\cdot 1 = 5089\,Kgf \qquad \frac{T_d}{W} = 0.080 \qquad \frac{T_d}{f} = \frac{5089}{2.24} = 2272 \qquad \sqrt{\frac{T_d}{f}} = 47.7$$

$$RC_{MAX} = 1.54(0.08)\cdot 47.7\cdot\frac{1}{\sqrt{0.374}} - 2.2\frac{(72.9)}{47.7\cdot\sqrt{0.374}} = 9.6 - 5.5 = 4.1\,m/s$$

A quote elevate anche il secondo termine diventa importante. Teoricamente non avrei potuto usare la relazione sopra perché il fattore gamma non è più =2.Ma cambierebbero solo leggermente i coefficienti dell’equazione. In definitiva, ai fini dell’importanza per determinare il massimo RC, i fattori che maggiormente influiscono sono:

Basse Quote: $\frac{T_d}{f} \quad \frac{T_d}{W}$

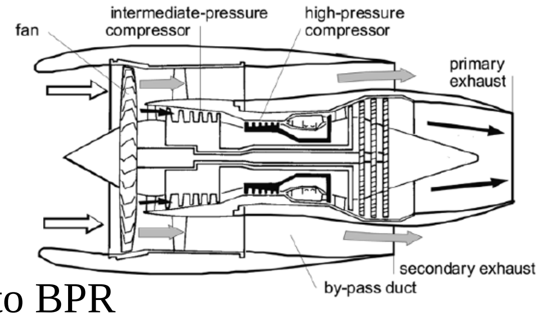
Alte quote: $\frac{T_d}{W} \quad \frac{T_d}{f} \quad \frac{W}{b_e^2}$

Prestazioni di salita

VEL GETTO

Se andiamo a considerare le reali curve di spinta al variare di velocità e quota per un velivolo da trasporto a getto motorizzato con motori turbofan ad alto BPR :

Velivolo tipo Boeing 737:
W=60000 Kg S=100 m^2 b=28.5m AR=8.1
Cdo=0.020 e=0.80
To=2 x 10000 Kg=20000 Kg

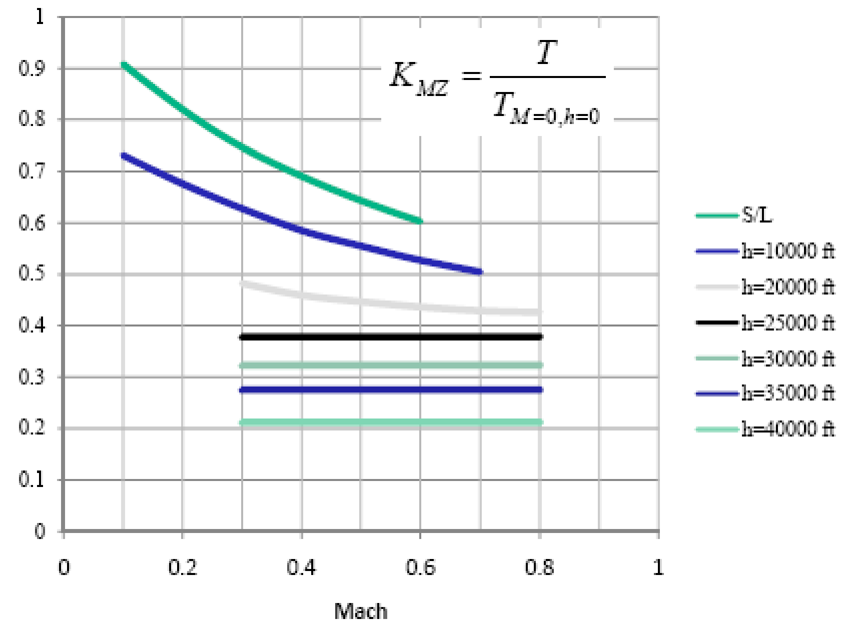


(b) Three-shaft high by-pass ratio turbofan

Motore TFAN ad alto BPR (HBPR), BPR=5-6

$C_{LE}=0.64$ $E_E= E_{MAX}=15.97$ (circa 16)
$V_E=122.6$ m/s = 441 Km/h (S/L)
$D_E=3756$ Kgf = 36830 N
$\Pi_E=D_E * V_E$ = 4516 kW (S/L)

Con le curve di spinta del motore assunte (MODELLO PRESENTATO NEL CAP. 6), con il fattore K_{MZ} a destra (condizioni di crociera) moltiplicato per 0.87(e non per 0.83 come fatto per la crociera in quanto è possibile sfruttare maggiormente il motore, cioè ad un rpm maggiore perché la salita è relativamente breve (15-20 min) rispetto alla crociera,

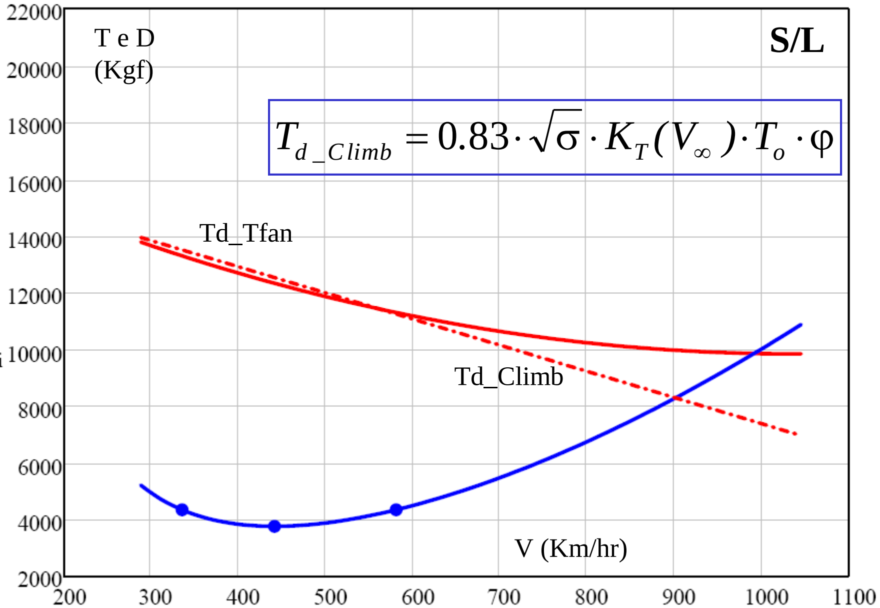


SI OTTENGONO LE CURVE ALLA PAGINA SEGUENTE:

Prestazioni di salita

VEL GETTO

Velivolo tipo Boeing 737:



$$\boxed{T_{d\_Tfan} = K_{MZ} \cdot 0.87 \cdot T_o}$$

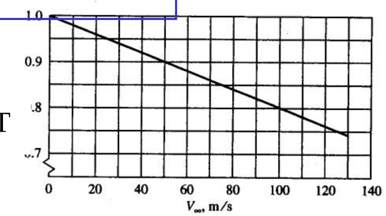
z=0 ft(S/L)	**KMZ= 1.00 –1.028 M + 0.608 M^2**
z= 10000 ft	**KMZ= 0.79 –0.651 M + 0.345 M^2**
z= 20000 ft	**KMZ= 0.56 –0.345 M + 0.216 M^2**
z= 25000 ft	**KMZ= 0.38**
z= 30000 ft	**KMZ= 0.32**
z= 35000 ft	**KMZ= 0.27**

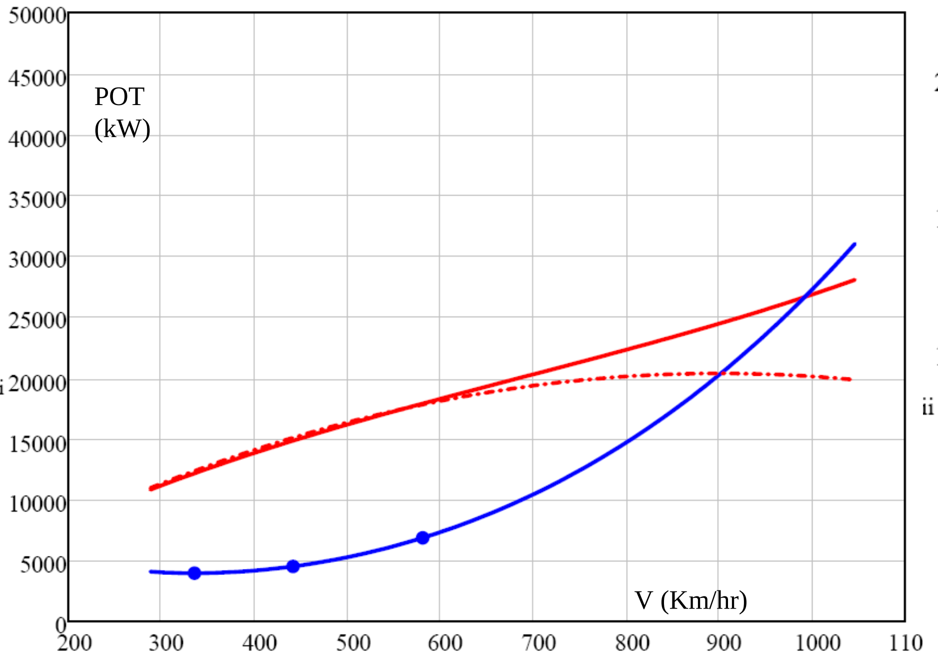
Modello spinta MAX CLIMB basse quote

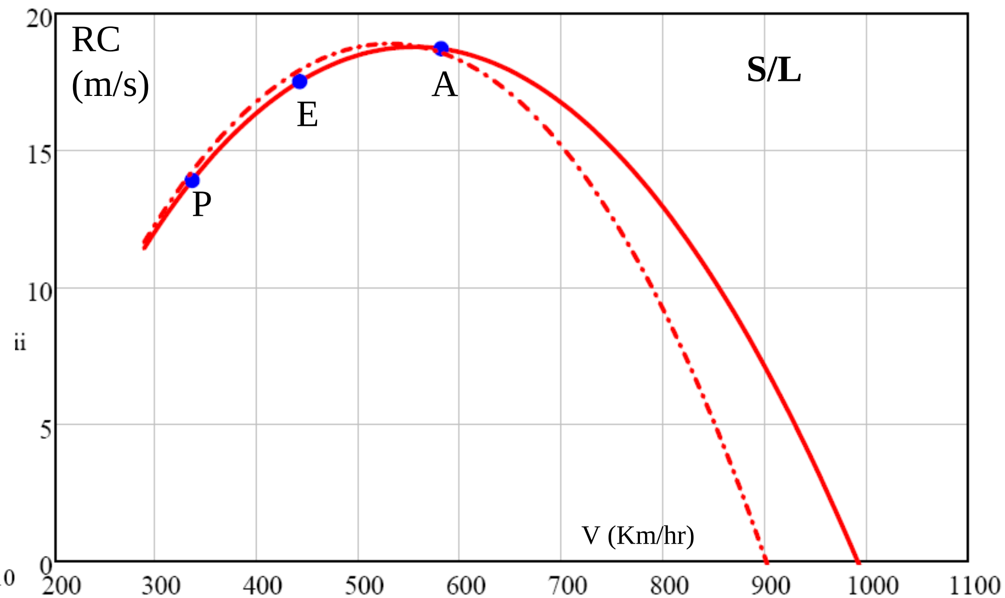
$$\boxed{T_{d\_Climb} = 0.83 \cdot \sqrt{\sigma} \cdot K_T(V_\infty) \cdot T_o \cdot \varphi}$$

$$K_T = \frac{T}{T_{V=0}} = 1 - 0.20 \cdot \frac{V_\infty}{100}$$

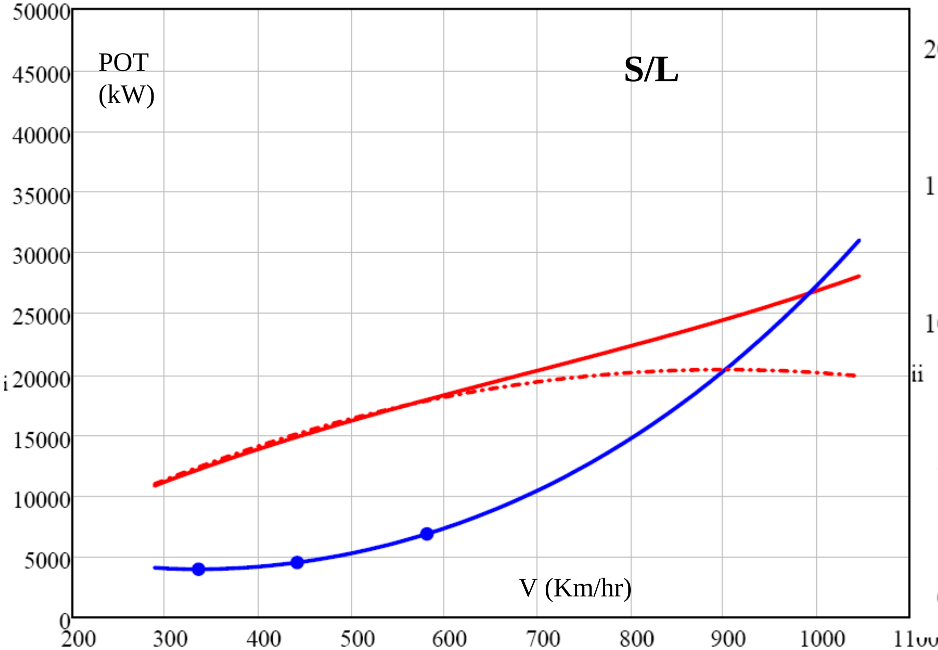
K_T

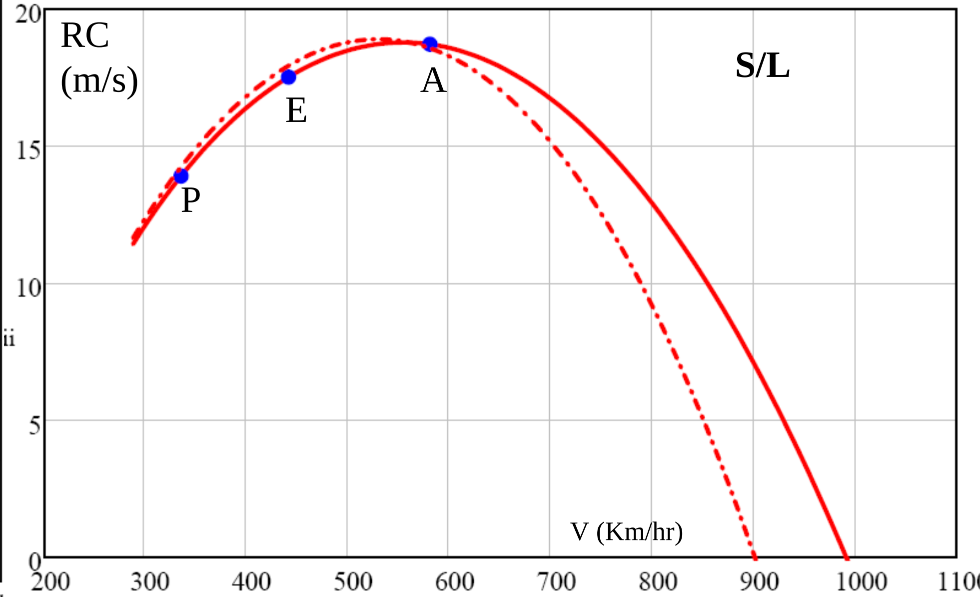






Prestazioni di salita VEL GETTO **Velivolo tipo Boeing 737**:





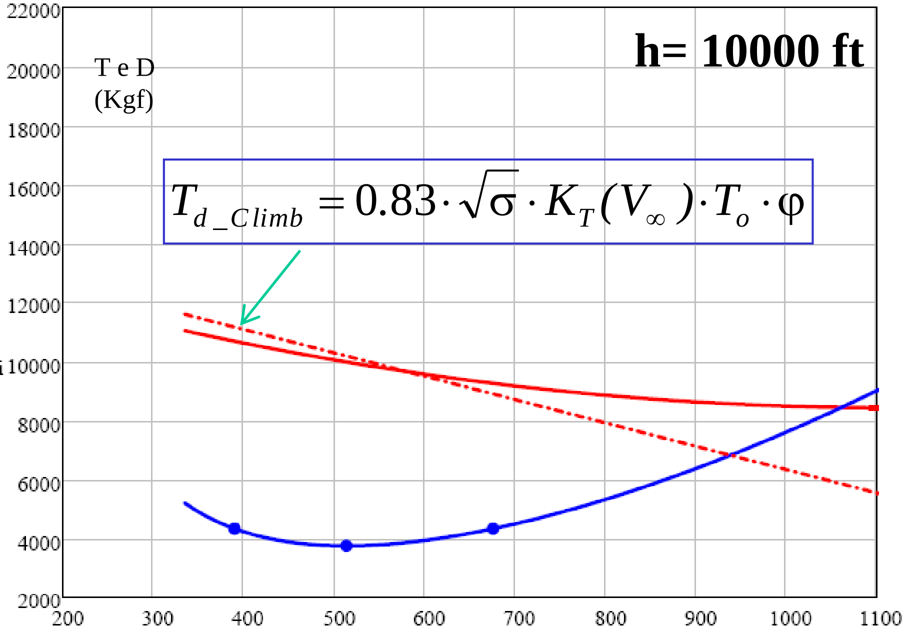
Per un B737 valori tipici del massimo RC a livello del mare (S/L) sono quindi intorno ai 18 m/s. (circa 3900 ft/min)

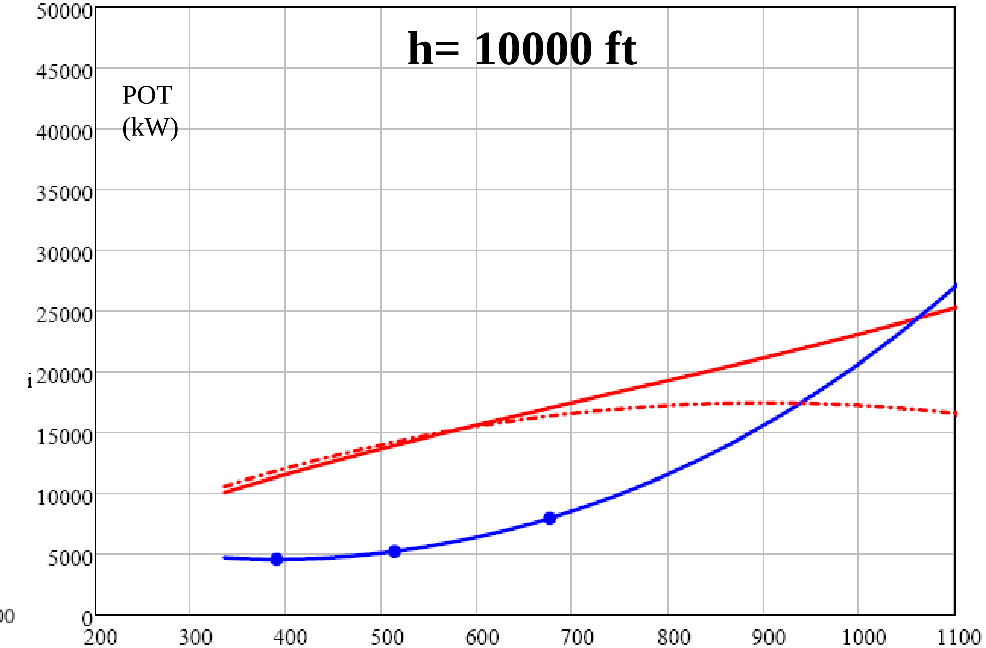
Il valore di RC massimo si ottiene ad un assetto tra E ed A.
Nei calcoli ed esercizi (senza possibilità di valutare l'intera curva) potremo assumere di valutare il massimo **nel punto E**, per semplicità.
E' chiaro che dovremo stimare la spinta disponibile nel punto E, cioè tenendo conto della riduzione di spinta con V legata al K_T.

$$\boxed{T_{d\_Climb} = 0.83 \cdot \sqrt{\sigma} \cdot K_T(V_\infty) \cdot T_o \cdot \varphi}$$

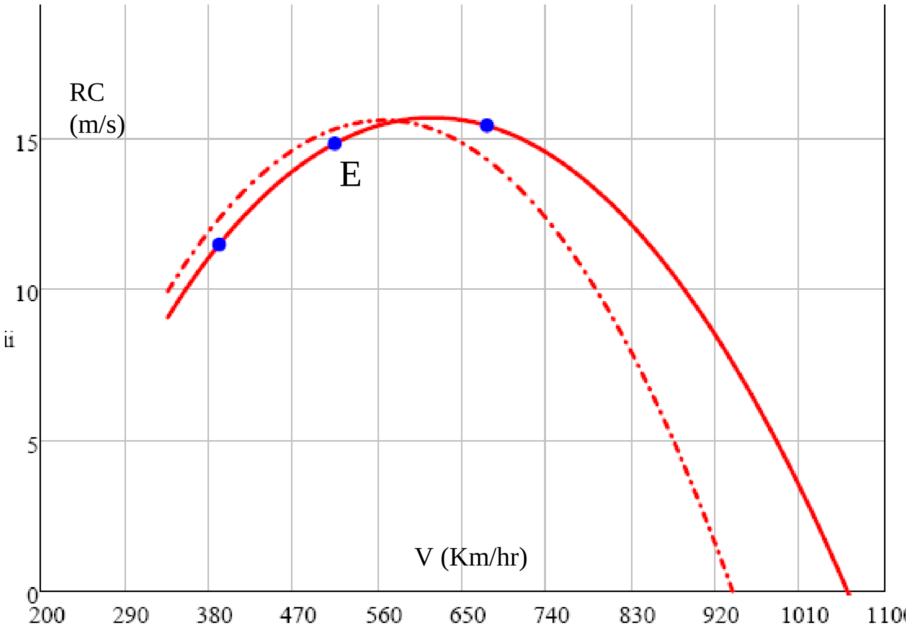
Prestazioni di salita

VEL GETTO **Velivolo tipo Boeing 737**:





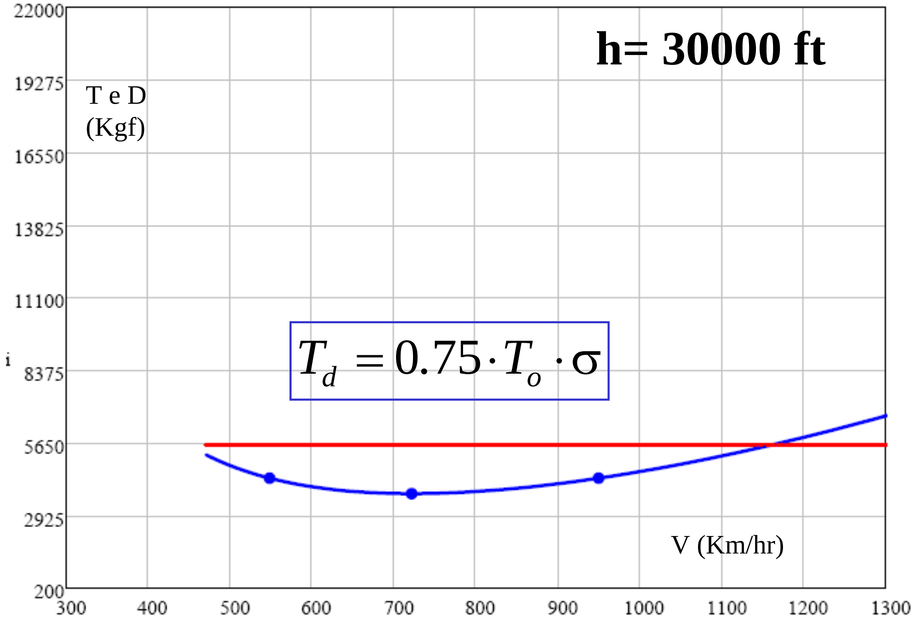
Anche a 10000 ft il modello semplificato fornisce buoni risultati, soprattutto se applicato nel punto E.

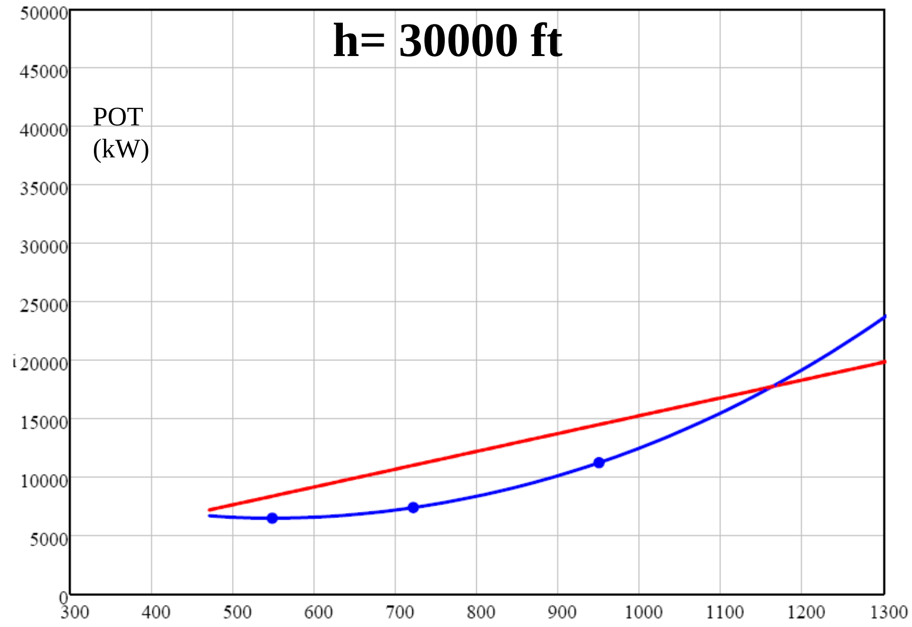


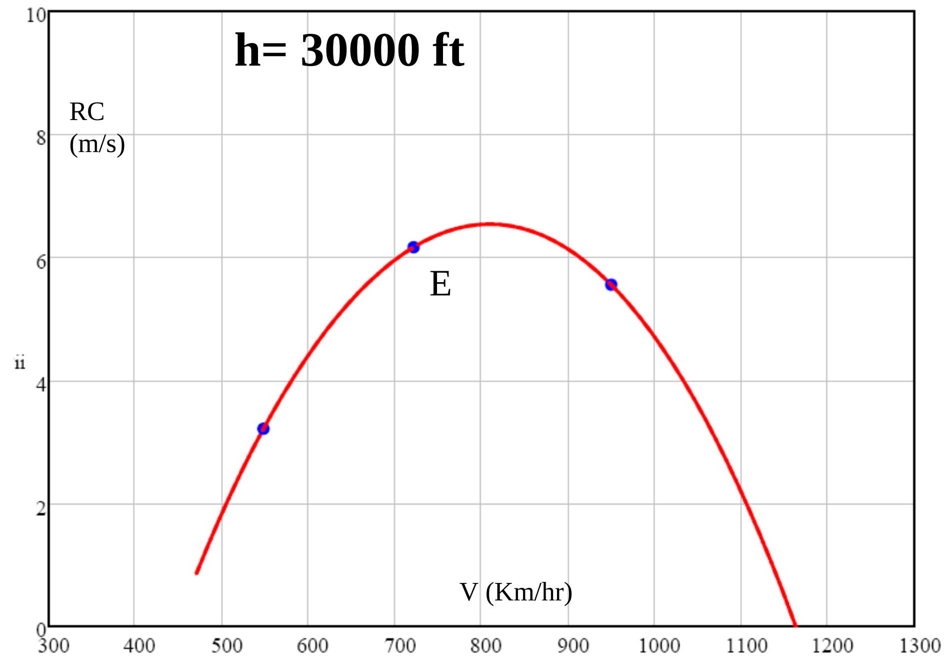
Prestazioni di salita

VEL GETTO

Velivolo tipo Boeing 737:







A quote elevate (es 30000 ft) il modello semplificato a velocità variabile non va bene e deve essere sostituito con il modello approssimato.

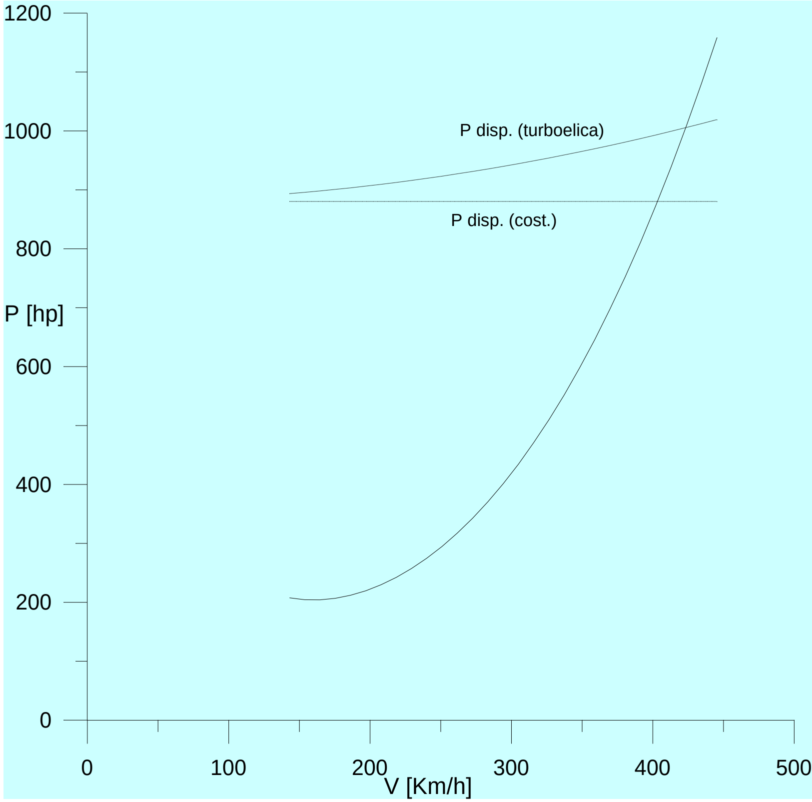
Alle alte quote il modello approssimato ed il modello più realistico coincidono.

$$\boxed{T_d = 0.75 \cdot T_o \cdot \sigma}$$

Alle quote elevate il punto E rappresenta senza dubbio l'assetto di massimo RC (molto vicino ad esso).

Prestazioni di salita Trattazione analitica - ELICA

$$\Pi d = \eta p \; \Pi a = T \, V$$



$$RC = \eta_p \left(\frac{\Pi_a}{W} \right) - \frac{1}{2} \frac{\rho V^3 \, \mathrm{C_{Do}}}{(\mathrm{W/S})}$$

$$- \frac{2}{\pi \, \mathrm{AR_e}} \frac{1}{\rho V} (W/S)$$

$$\Pi_{no\_MIN} = \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot (4 \cdot CDo) \cdot V_P{}^3 = \sqrt{\frac{2}{\rho}} W^{3/2} \frac{1}{S^{1/2}} \frac{4\mathrm{C_{Do}}}{3^{3/4} \, \pi^{3/4} \, \mathrm{AR_e}{}^{3/4} \, \mathrm{C_{Do}}{}^{3/4}}$$

$$= \frac{4}{3^{3/4}} \sqrt{\frac{2}{\rho_o}} \frac{1}{\pi^{3/4}} \frac{\mathrm{W}^{3/2}}{\sigma^{1/2}} \frac{\mathrm{C_{Do}}{}^{1/4}}{\mathrm{AR_e}{}^{3/4} \; \mathrm{S}^{1/2}} = 0.95 \frac{\mathrm{W}^{3/2}}{\sigma^{1/2}} \frac{\mathrm{C_{Do}}{}^{1/4}}{\mathrm{AR_e}{}^{3/4} \; \mathrm{S}^{1/2}}$$

Prestazioni di salita Trattazione analitica - ELICA

$$\Pi_{no\_MIN} = \frac{4}{3^{3/4}}\sqrt{\frac{2}{\rho_o}}\,\frac{1}{\pi^{3/4}}\,\frac{\mathrm{W}^{3/2}}{\sigma^{1/2}}\,\frac{\mathrm{C_{Do}}^{1/4}}{\mathrm{AR_e}^{3/4}\ \mathrm{S}^{1/2}} = 0.95\,\frac{\mathrm{W}^{3/2}}{\sigma^{1/2}}\,\frac{\mathrm{C_{Do}}^{1/4}}{\mathrm{AR_e}^{3/4}\ \mathrm{S}^{1/2}}$$

$$RC\_\max = 76\cdot\eta_p\,\frac{\Pi_a}{W} - 2.97\sqrt{\frac{W}{\sigma}}\,\frac{\mathrm{C_{Do}}^{1/4}}{AR_e^{3/4}\ \mathrm{S}^{1/2}}$$

Con potenza in [hp] e W in [Kg]

$$RC\_\max = 76 \cdot \eta_p \frac{\Pi_a}{W} - 2.97 \sqrt{\frac{W}{\sigma}}\, \frac{C_{Do}^{\ 1/4}}{AR_e^{\ 3/4}\ S^{1/2}}$$

Con potenza in [hp] e W in [Kg]

ma

$$\frac{C_{Do}^{\ 1/4}}{\left(\frac{b_e^{\ 2}}{S}\right)^{3/4} S^{1/2}} = \frac{\left(C_{Do}\ S\right)^{1/4}}{b_e^{\ 3/2}\ S^{-3/4}\ S^{1/2}\ S^{1/4}} = \frac{f^{1/4}}{b_e^{\ 3/2}}$$

$$\boxed{RC_{MAX} = 76 \cdot \eta_p \frac{\Pi_a}{W} - 2.97 \sqrt{\frac{W}{\sigma}}\, \frac{f^{1/4}}{b_e^{\ 3/2}}}$$

Con potenza in [hp] e W in [Kg]

Si può anche ricavare una espressione più semplice:

$$RC_{MAX} = \frac{\Pi_d}{W} - \frac{\Pi_{MIN}}{W}$$

$$\Pi_{MIN} = \Pi_P = V_P \cdot D_P = \frac{V_E}{1.32} \cdot \frac{W}{E_P} = \frac{V_E}{1.32} \cdot \frac{W}{E_{MAX}} \frac{2}{\sqrt{3}} = 0.875 \frac{V_E}{} \cdot \frac{W}{E_{MAX}}$$

$$RC_{MAX} = \frac{\Pi_d}{W} - 0.875 \frac{V_E}{E_{MAX}}$$

$$\boxed{RC_{MAX} = \eta_P \frac{\Pi_a}{W} - 0.875 \left[\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{CL_E} \right]^{1/2} \frac{1}{E_{MAX}}}$$

$$RC_{MAX} = 76 \cdot \eta_p \frac{\Pi_a}{W} - 2.97 \sqrt{\frac{W}{\sigma}} \frac{f^{1/4}}{b_e^{3/2}}$$

PARAMETRO FONDAMENTALE

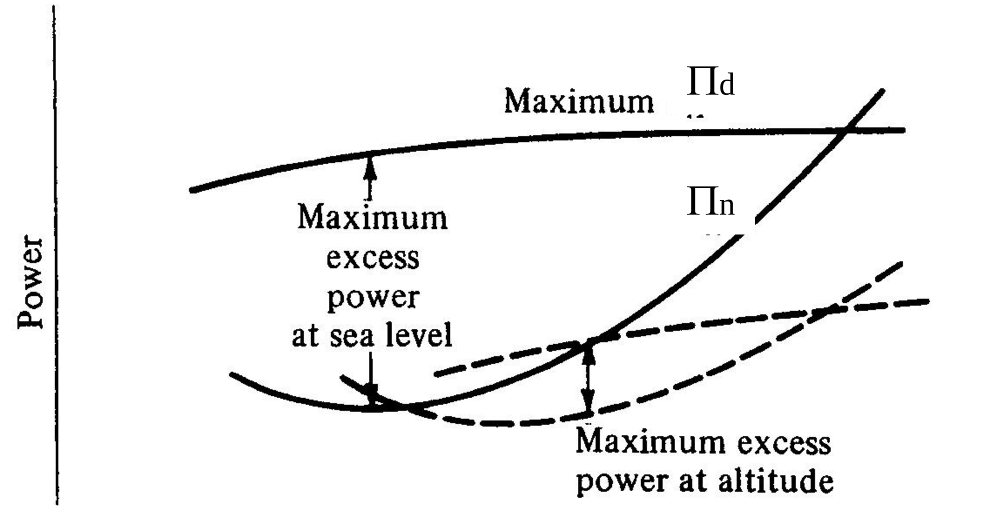
$$RC_{MAX} = \eta_P \frac{\Pi_a}{W} - 0.875 \left[\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{CL_E} \right]^{1/2} \frac{1}{E_{MAX}}$$

Un'altra importantissima informazione che si ricava dalla formula è che per un velivolo ad elica il massimo rateo di salita aumenta al **RIDURSI del carico alare**. Quindi, mentre per un velivolo a getto il rateo massimo di salita cresce al crescere del carico alare, per un velivolo ad elica succede il contrario !
Quindi ridurre la superficie alare per un velivolo ad elica non comporta per il rateo di salita un vantaggio come per i velivoli a getto.

Per i velivoli ad elica è molto importante l'apertura alare per avere buone capacità di salita !!

QUOTA TANGENZA

Quota, m	Massimo R/C, m/s
0	7.6
1219.2	6.3
2348.4	5.0
3657.6	3.8
4876.8	2.7
6096	1.7
7315.2	0.7
7924.8	0.2

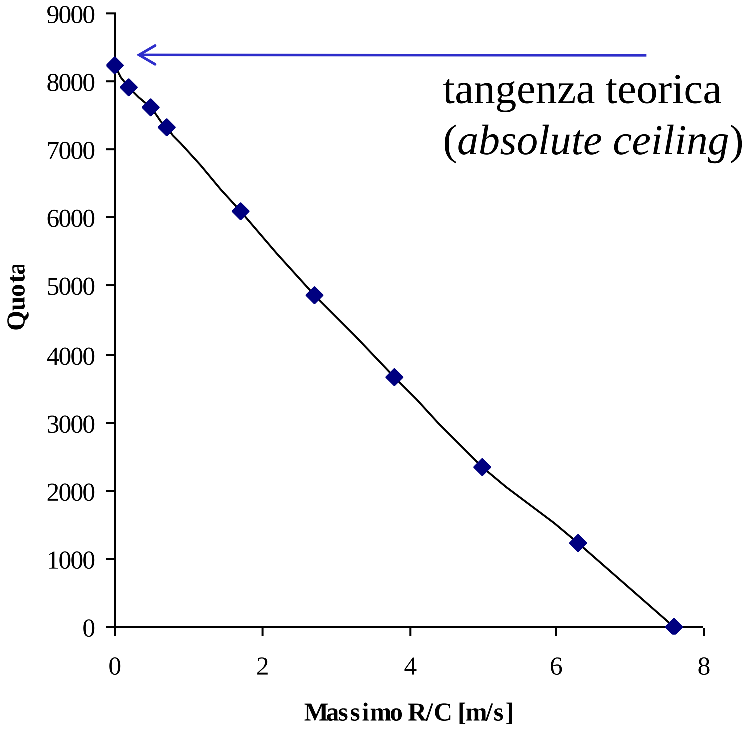


Quote di tangenza per il CP-1

All'aumentare della quota l'eccesso di potenza si riduce, in quanto la potenza disponibile diminuisce per tutti i sistemi propulsivi, mentre la potenza necessaria aumenta.

Conseguentemente il max RC (massimo rateo di salita) si riduce con la quota (vedi esempio).

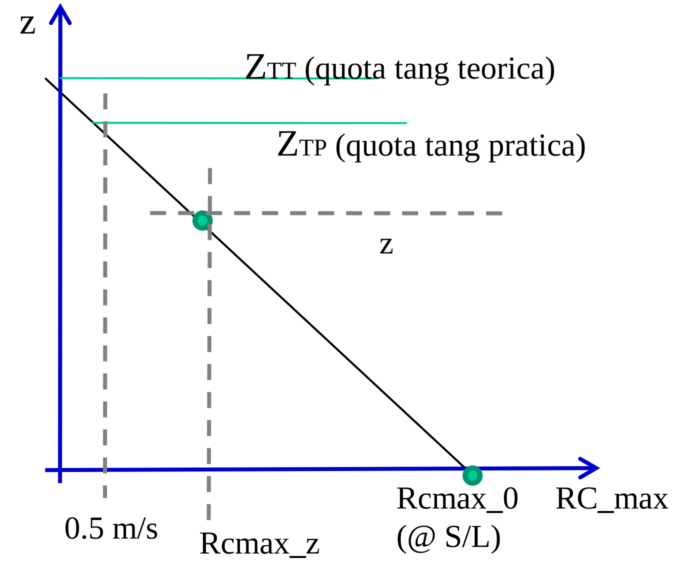
Ci sarà una quota alla quale il massimo rateo è =0 , detta appunto quota di tangenza teorica (*absolute ceiling*)



QUOTA TANGENZA

Velivoli ad elica

Come ricavare la quota di tangenza



Estrapolazione

Un primo modo per ricavare la quota di tangenza teorica (ma eventualmente anche quella pratica) è quello di estrapolare la relazione lineare (assumendo andamento lineare di RC_max con la quota) avendo calcolato il valore di RCmax a 2 quote, ad esempio a livello del mare e ad una quota pari a 6000 o 8000 m. Calcolato il valore a quota 0 (S/L), chiamato Rcmax_0 e calcolato il valore ad una quota elevata z scelta a piacere (Rcmax_z) :

$$\boxed{RC_{MAX} = a + b \cdot z} \quad Eq\ (1) \qquad \text{con} \quad \boxed{a = RC\max\_0} \quad \boxed{b = \frac{(RC\max\_z - \text{RCmax\_0})}{z}}$$

Con **a** si è indicato il termine noto e con **b** la pendenza della retta. Si può quindi ricavare sia la quota di tangenza teorica che quella pratica(ponendo l'equazione (1) rispettivamente =0 oppure =0.5 m/s):

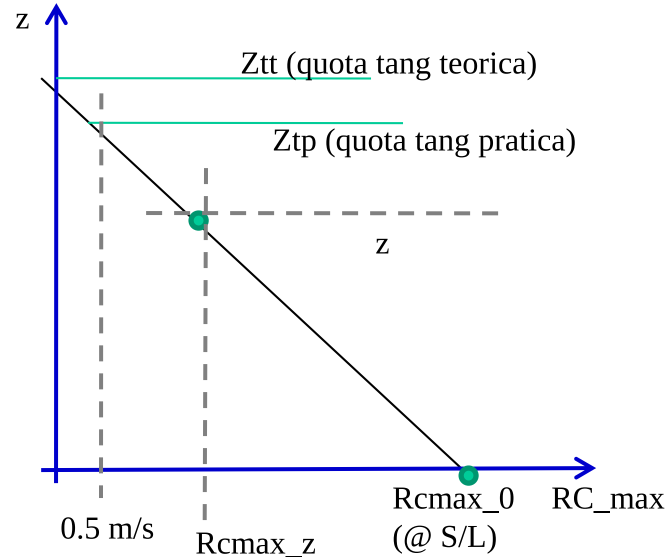
$$\boxed{Z_{TT} = -\frac{a}{b}} \qquad \boxed{Z_{TP} = \frac{(-a + 0.5 \cdot m/s)}{b}}$$

Si noti che a ha le dimensioni di [m/s] e b ha le dimensioni di [1/s], il risultato viene espresso in [m]

QUOTA TANGENZA

Come ricavare la quota di tangenza

Estrapolazione



Esempio applicativo(turboelica tipo ATR 72):

W= 20000 Kg S=60 mq b=27 m AR=12.1

Cdo=0.027 e=0.80

$\Pi_{ao} := 2\cdot 2750\cdot hp$ =5500 hp $\eta_p := 0.8$

$E_E = 16.815$ $E_P = 14.562$ $\Pi_{ao}\cdot\eta_P = 4400\,hp = 3281\ kW$

Si calcola il massimo rateo a quota S/L:

$V_P(z) := \sqrt{\dfrac{2}{\rho_0\cdot\sigma(z)}\cdot\dfrac{W}{S}\cdot\dfrac{1}{CL_P}}$ $V_P(0\cdot m) = 58.253\,\dfrac{m}{s}$ $V_P(0\cdot m) = 209.712\cdot\dfrac{km}{hr}$ $D_P := \dfrac{W}{E_P}$ $\Pi n_P(0) = D_P\cdot V_P(0\cdot m)$

$D_P = 13469\,N$ $\Pi n_P(0) = 784.6\cdot kW$

$V_P(0\cdot m) = 209.712\cdot\dfrac{km}{hr} \rightarrow K_V = 1.033$ $\Pi d(z) := \Pi_{ao}\cdot K_V\cdot\phi\cdot\sigma(z)\cdot\eta_p$ $\Pi d(0) = 3391\cdot kW$

$$\boxed{RC_{max}(0\cdot m) = \frac{\Pi_d(0) - \Pi_{nP}(0)}{W}}$$ $RC_{max}(0\cdot m) = 13.288\,\dfrac{m}{s}$ $\boxed{a = RC\max\_0 = 13.288\,[m/s]}$

Si calcola poi il massimo rateo a quota z, avendo scelto z=8000 m: $\sigma(z) = 0.43$

z=8000 m $V_P(z) = 88.978\,\dfrac{m}{s}$ $V = 320.321\cdot\dfrac{km}{hr} \rightarrow K_V = 1.08$ $\Pi d(z) := \Pi_{ao}\cdot K_V\cdot\phi\cdot\sigma(z)\cdot\eta_p$ $\Pi d(z) = 1519\cdot kW$

$\Pi n_P(z) := D_P\cdot V_P(z)$ $\Pi n_P(z) = 1198\cdot kW$

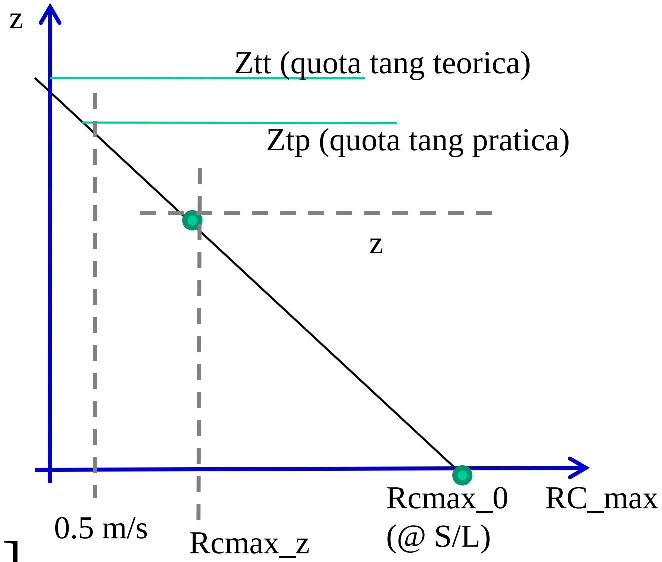
$$\boxed{RC_{max}(z) = \frac{\Pi_d(z) - \Pi_{nP}(z)}{W}}$$ $\boxed{RC\max\_z = 1.64\,[m/s]}$

QUOTA TANGENZA

Come ricavare la quota di tangenza

Estrapolazione

Esempio applicativo(turboelica tipo ATR 72) (continua):



$$a = RC\max\_0 = 13.288\,[m/s]$$

$$RC\max\_z = 1.64\,[m/s]$$

$$b = \frac{(RC\max\_z - \mathrm{RCmax\_0})}{\mathrm{z}} \qquad b = -0.001456\,[1/s]$$

$$z_{TT} = -\frac{a}{b} = 9124\,m$$

Quota di tangenza teorica (absolute ceiling)

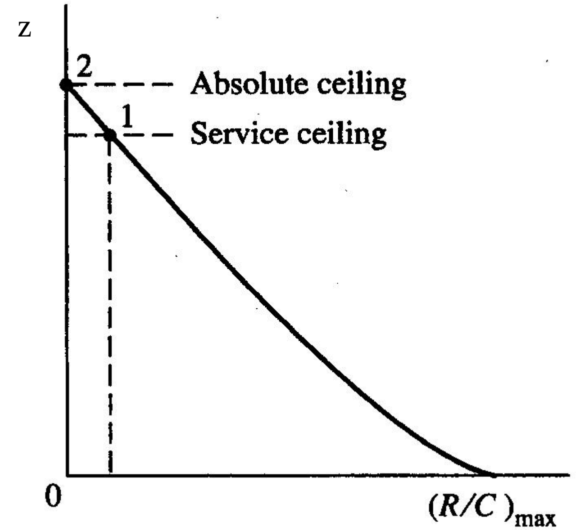
$$z_{TP} = \frac{(-a + 0.5 \cdot m/s)}{b} = 8780\,m$$

Quota di tangenza pratica (service ceiling)

QUOTA TANGENZA

Come ricavare la quota di tangenza teorica

Metodo diretto analitico Velivoli ad elica



Il massimo rateo ad ogni quota si ha nel punto P.
L'espressione sotto mostra come è funzione della quota (avendo espresso la variazione di potenza all'albero con la quota pari al rapporto delle densità) e avendo esplicitato al secondo termine la potenza necessaria minima ad ogni quota (punto P).

$$RC_{MAX} = \frac{\Pi_{ao} \cdot \eta_P \cdot \sigma(z) \cdot K_v}{W} - \frac{D_P \cdot V_P(z)}{W}$$

Velocità punto P a quota 0 (S/L)

$$V_{Po} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o} \frac{W}{S} \frac{1}{CL_P}}$$

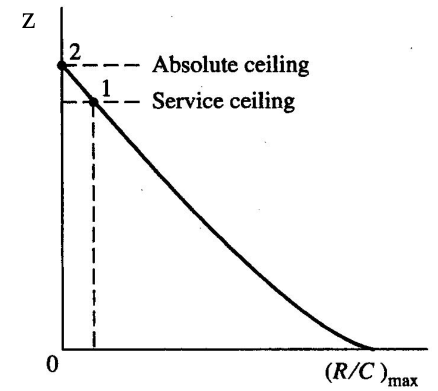
$$RC_{MAX} = \frac{\Pi_{ao} \cdot \eta_P \cdot \sigma(z) \cdot K_v}{W} - \frac{D_P \cdot \dfrac{V_{Po}}{\sqrt{\sigma}}}{W}$$

Si vede quindi che viene una funzione di sigma (densità relativa) e ponendo l'espressione uguale a 0 si viene a trovare il valore di sigma che corrisponde alla quota di tangenza teorica (dove il massimo rateo salita RCMAX è appunto =0)

QUOTA TANGENZA

Come ricavare la quota di tangenza teorica

Metodo diretto analitico Velivoli ad elica



σ_{TT} Valore di sigma (rapp densità) alla quota di tangenza teorica

$$RC_{MAX} = \frac{1}{W}\left[\Pi_{ao} \cdot \eta_P \cdot \sigma_{TT} \cdot K_v - D_P \cdot \frac{V_{Po}}{\sqrt{\sigma_{TT}}}\right] = 0$$

$$\Pi_{ao} \cdot \eta_P \cdot \sigma_{TT} \cdot K_v = D_P \cdot \frac{V_{Po}}{\sqrt{\sigma_{TT}}}$$

Velocità punto P a quota 0 (S/L)

$$V_{Po} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o}\frac{W}{S}\frac{1}{CL_P}}$$

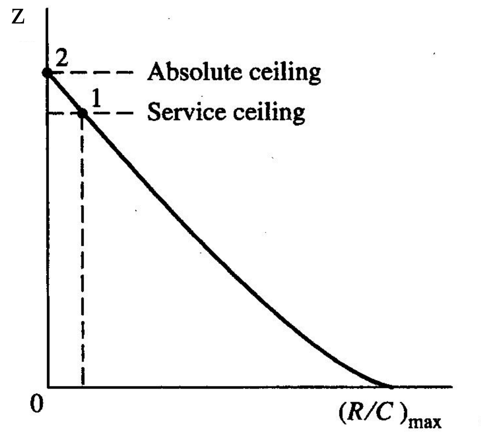
$$D_P = \frac{W}{E_P}$$

$$\sigma_{TT}{}^{3/2} = \frac{D_P \cdot V_{Po}}{\Pi_{ao} \cdot \eta_P \cdot K_v}$$

$$\sigma_{TT} = \left[\frac{D_P \cdot V_{Po}}{\Pi_{ao} \cdot \eta_P \cdot K_{vtt}}\right]^{2/3}$$

In effetti per motori turboelica il fattore Kv non è indipendente dalla quota, poiché dipende dalla velocità alla quale viene calcolato, che è la V_P (e che è una velocità vera e dipende dalla quota). E' però vero che alla V_P (velocità bassa) il Kv è molto piccolo (tra 1.03 ed 1.05 a quote alte) e quindi potrebbe praticamente essere trascurato (cioè posto =1). In effetti si fa un primo calcolo con Kv=1, si stima la quota, si stima la V_P a tale quota e si ri-stima il Kv e si effettua il calcolo una seconda volta.

QUOTA TANGENZA Velivoli ad elica



Come ricavare la quota di tangenza teorica

Metodo diretto analitico

σ_{TT} Valore di sigma (rapp densità) alla quota di tangenza teorica

$$\sigma_{TT} = \left[\frac{D_P \cdot V_{Po}}{\Pi_{ao} \cdot \eta_P \cdot K_v} \right]^{2/3}$$

Esempio calcolo (ATR72):

Velocità punto P a quota 0 (S/L)

$$V_{Po} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o} \frac{W}{S} \frac{1}{CL_P}}$$

$$D_P = \frac{W}{E_P}$$

W= 20000 Kg S=60 mq b=27 m AR=12.1

Cdo=0.027 e=0.80

$\Pi_{.ao} := 2 \cdot 2750 \cdot hp$ =5500 hp $\eta_{.p} := 0.8$

$E_{.E} = 16.815$ $E_{.P} = 14.562$ $\Pi_{ao} \cdot \eta_P = 4400\, hp = 3281\ kW$

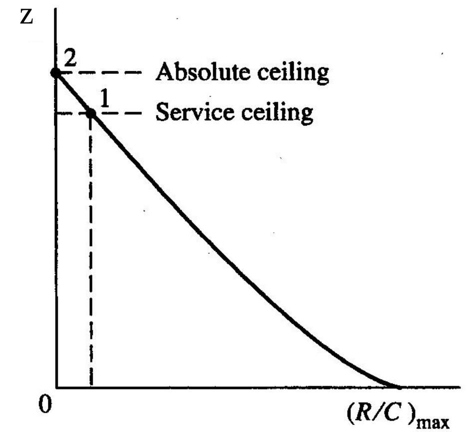
$V_{.P}(0 \cdot m) = 58.253 \frac{m}{s}$ $V_{.P}(0 \cdot m) = 209.712 \cdot \frac{km}{hr}$

$D_{.P} = 13469\, N$ $D_{.P} = 1373.4 \cdot kgf$

Assumiamo inizialmente Kv=1
Ed usiamo le unita del S.I.
(N, m/s e Watt)

$$\sigma_{TT} = \left[\frac{13469 \cdot 58.2}{3281 \cdot 10^3} \right]^{2/3} = [0.239]^{2/3} = 0.385$$

QUOTA TANGENZA Velivoli ad elica



Esempio calcolo (ATR72): **Metodo diretto analitico**

σ_{TT} Valore di sigma (rapp densità) alla quota di tangenza teorica

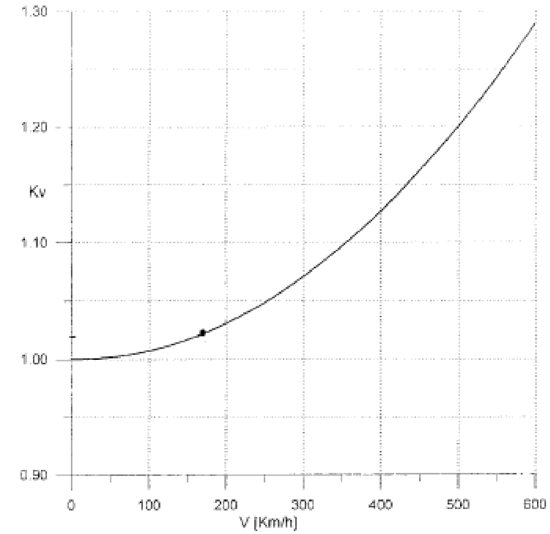
$$\sigma_{TT} = \left[\frac{13469 \cdot 58.2}{3281 \cdot 10^3}\right]^{2/3} = [0.239]^{2/3} = 0.385$$

Che corrisponde ad una quota di circa Z_{TT}= 8901 m.

Con tale valore di quota, la velocità del punto P è:

$$V_P(z) = 93.858 \frac{m}{s} \qquad V_P(z) = 337.887 \cdot \frac{km}{hr}$$

Il valore di Kv dal grafico a tale V è =1.09



EFFETTO RAM MOTORE TURBOELICA

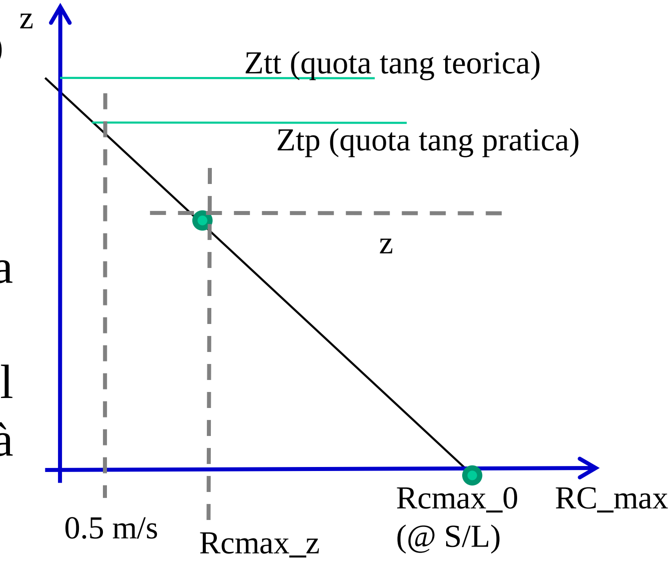
Leggere Valore Kv dal grafico

Ricalcolando il valore della quota di tangenza:

$$\sigma_{TT} = \left[\frac{13469 \cdot 58.2}{3281 \cdot 10^3 \cdot 1.09}\right]^{2/3} = [0.220]^{2/3} = 0.364$$

Che fornisce un valore finale della quota di tangenza pari a circa Z_{TT}= 9370 m (quindi non eccessivamente diversa da quella precedentemente calcolata con Kv=1, ma comunque più accurata).

QUOTA TANGENZA Velivoli a getto



Estrapolazione

Ovviamente, anche nel caso di velivolo a getto, posso calcolare il max RC a due quote e poi per estrapolazione trovare la quota di tangenza (sia teorica che pratica).
Ovviamente, nei calcoli, come detto, assumiamo sempre il punto E come velocità alla quale fare i calcoli e dove il jet avrà massimo rateo di salita.
ESEMPIO : **Velivolo MD80**

W=63500 Kg S=112 m^2 b=33m Cdo=0.020 e=0.80
To=2 x 9072 Kg=18144 Kg

Quota S/L

Il massimo RC viene valutato ad una velocità pari a quella del punto E (massima efficienza) perché per il velivolo a getto graficamente sembra essere la velocità alla quale è massimo l'eccesso di potenza.

$$RC_{MAX} = \frac{\Pi_{dE} - \Pi_{no\_E}}{W} = \frac{(T_{d\_V_E} \cdot V_E - D_E \cdot V_E)}{W}$$

Ricordiamo solamente che, a rigore, la spinta di un motore turbofan, soprattutto alle basse quote, non è costante con la velocità, ma segue l'andamento visto nel cap. 6.

QUOTA TANGENZA

Velivoli a getto

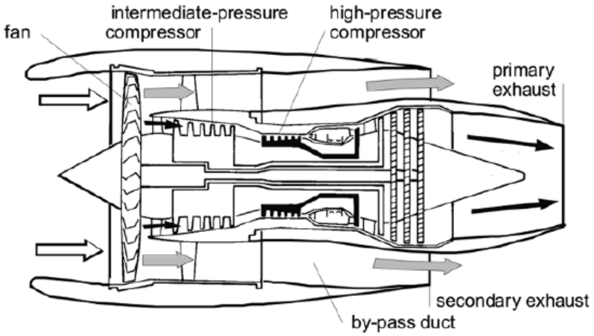
Estrapolazione

$$T_{d\_Climb} = 0.83 \cdot \sqrt{\sigma} \cdot K_T(V_\infty) \cdot T_o \cdot \varphi$$

ESEMPIO : **Velivolo MD80**

$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho_0}\frac{W}{S}\frac{1}{C_{L_E}}} = V_{E,0} = 113.9 \ \ m/s$$

Calcolo max RC a S/L



(b) Three-shaft high by-pass ratio turbofan

$$K_T = \frac{T}{T_{V=0}} = 1 - 0.20 \cdot \frac{V_E}{100} = 0.772$$

$$T_d = 11627 \, Kg$$

$$\frac{T_d}{W} = 0.183$$

$$RC_{MAX} = \frac{T_d \cdot V_E - D_E \cdot V_E}{W}$$

$$E_E = E_{MAX} = 17.5$$

$$D_E = \frac{W}{E_{MAX}} = 3633 \, Kgf$$

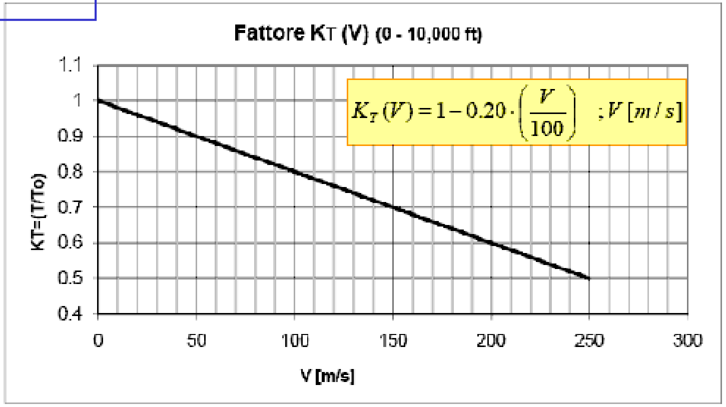
$$RC_{MAX\_1} = \frac{T_d \cdot V_E}{W}$$

$$RC_{MAX\_1} = 20.86 \, m/s$$

$$RC_{MAX\_2} = \frac{D_E \cdot V_E}{W}$$

$$RC_{MAX\_2} = 6.52 \, m/s$$

Motore TFAN ad alto BPR (HBPR), BPR=5-6



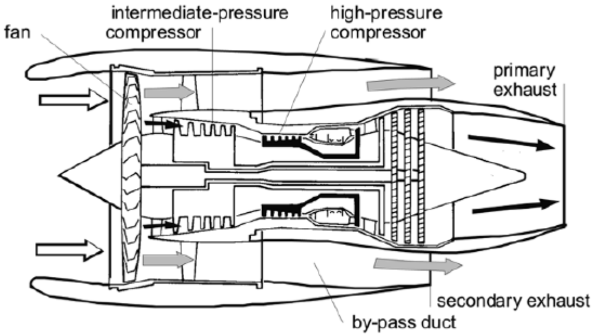
<u>Rateo massimo calcolato a S/L nel punto E</u>

$$RC_{MAX} = 20.9 - 6.5 = 14.4 \, m/s$$

QUOTA TANGENZA Velivoli a getto

Estrapolazione - Calcolo Rcmax in QUOTA

ESEMPIO : **Velivolo MD80** $T_{d\_Climb} = 0.75 \cdot \sigma \cdot T_o \cdot \varphi$



(b) Three-shaft high by-pass ratio turbofan

Modello Tfan HBPR alte quote

Calcoliamo RC massimo a quota 30,000 ft $\sigma = 0.37$

$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \cdot \sigma} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{L_E}}} = \frac{V_{E,0}}{\sqrt{\sigma}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} = 1.64$$

$$V_E = 186.4 \, m/s$$

$$E_E = E_{MAX} = 17.5$$

$$T_d = 0.75 \cdot 0.37 \cdot 18144 = 5086 \; Kgf$$

$$D_E = \frac{W}{E_{MAX}} = 3633 \, Kgf$$

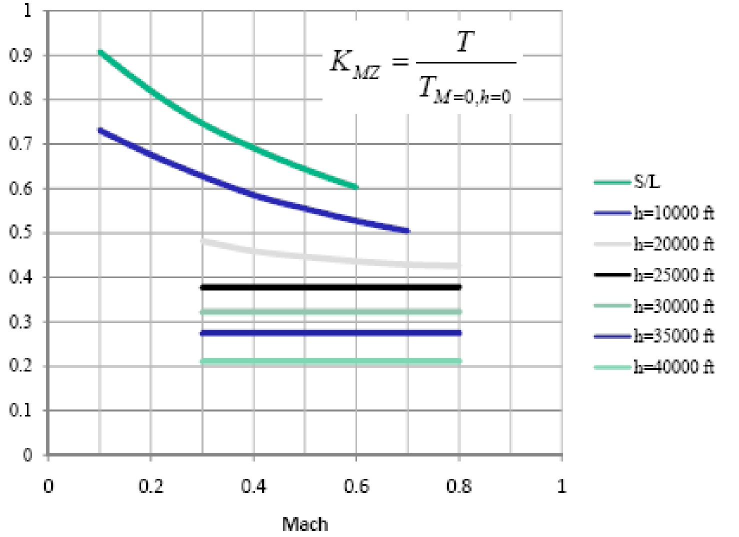
$$RC_{MAX} = \frac{T_d \cdot V_E - D_E \cdot V_E}{W}$$

$$RC_{MAX} = \frac{(5086 \cdot 9.81 \cdot 186.4) - (3633 \cdot 9.81 \cdot 186.4)}{63500 \cdot 9.81}$$

$$RC_{MAX} = \frac{9297 \, kW - 6641 \, kW}{63500 \cdot 9.81} = 14.9 - 10.7 = 4.2 \, m/s$$

Rateo massimo calcolato in quota nel punto E.

Motore TFAN ad alto BPR (HBPR), BPR=5-6



QUOTA TANGENZA Velivoli a getto

$$RC_{MAX} = a + b \cdot z$$

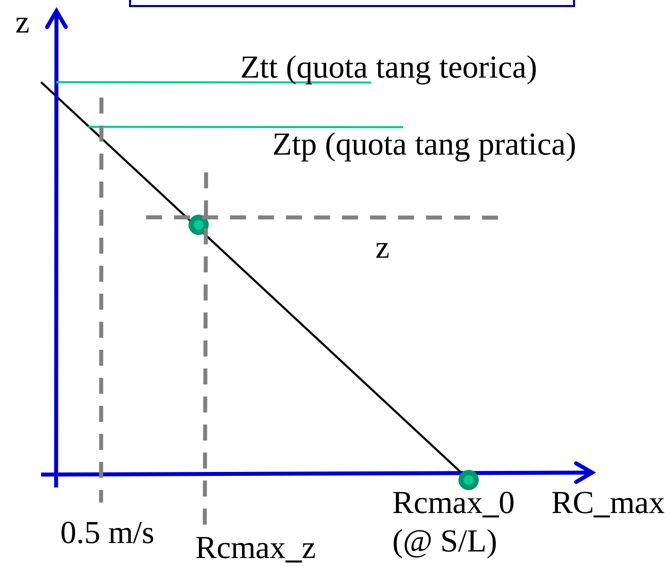
Estrapolazione , JET , caso MD-80

$$a = RC\,max\_0 = 14.4\ [m/s]$$

$RC\,max\_z = 4.2\ [m/s]$ calcolato in quota, a z=30,000 ft (9150 m)

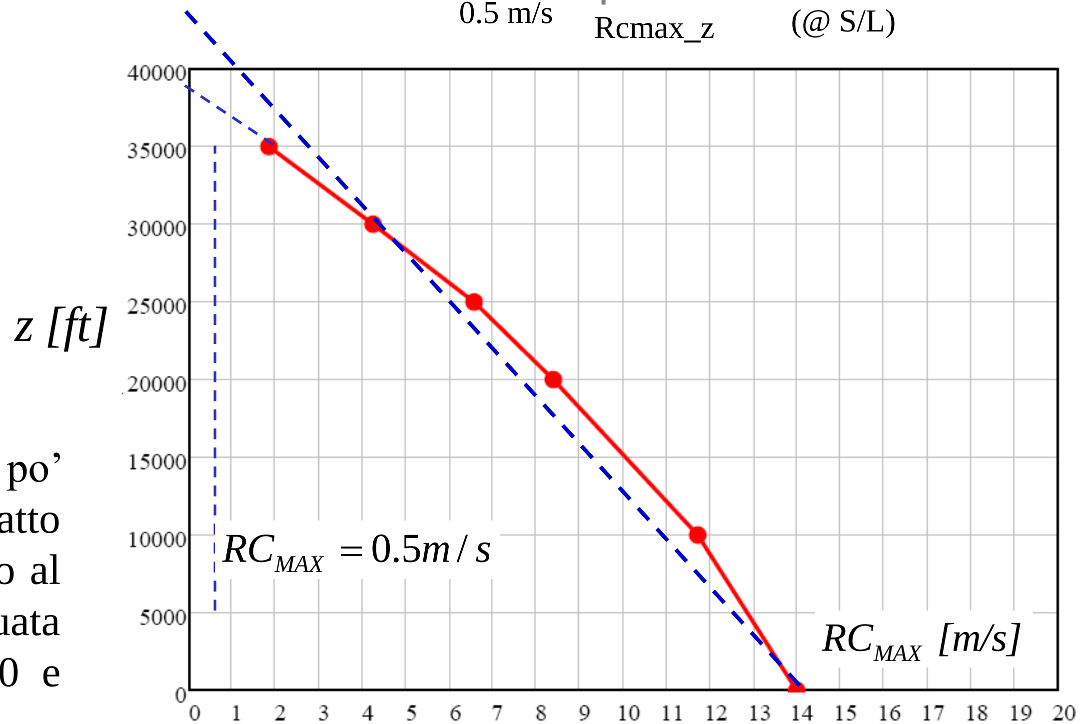
$$b = \frac{(RC\,max\_z - RCmax\_0)}{z} = \frac{14.4 - 4.2}{9150}$$

$$b = -0.00111\,[1/s]$$



$$z_{TT} = -\frac{a}{b} = 12973\,m = 42500\,ft$$

$$z_{TP} = \frac{(-a + 0.5 \cdot m/s)}{b} = 12520\,m = 41000\,ft$$



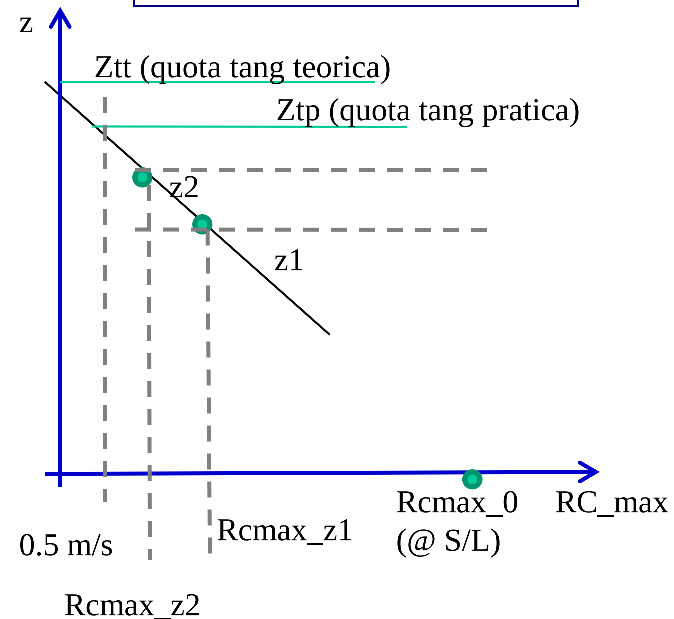
Si nota come c'è un certo errore(valori un po' elevati), rispetto ai dati calcolati in modo esatto con le reali curve di spinta. L'errore è dovuto al fatto che l'estrapolazione andrebbe effettuata usando 2 quote elevate, ad esempio 25,000 e 30,000 ft.

QUOTA TANGENZA Velivoli a getto

$$RC_{MAX} = a + b \cdot z$$

Estrapolazione , JET , caso MD-80

Calcolando il valore di RC massimo a 2 quote elevate, calcolando di nuovo RC massimo, ma a quota 35,000 ft (10670 m) : $\sigma = 0.31$



$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \cdot \sigma} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{L_E}}} = \frac{V_{E,0}}{\sqrt{\sigma}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} = 1.80$$

$$V_E = 204.7\ m/s$$

$$E_E = E_{MAX} = 17.5$$

$$T_d = 0.75 \cdot 0.31 \cdot 18144 = 4215\ Kgf$$

$$D_E = \frac{W}{E_{MAX}} = 3633\ Kgf$$

$$RC_{MAX} = \frac{T_d \cdot V_E - D_E \cdot V_E}{W} = 13.6 - 11.7 = 1.9\ m/s$$

Facendo estrapolazione tra 30,000 e 35,000 ft, si trova un gradiente pari a:

$$b = \frac{(RC\,max\_z2 - RCmax\_z1)}{(z2 - z1)} = \frac{1.9 - 4.2 (m/s)}{(10670 - 9150)m} = -0.00151 \left(\frac{1}{s}\right)$$

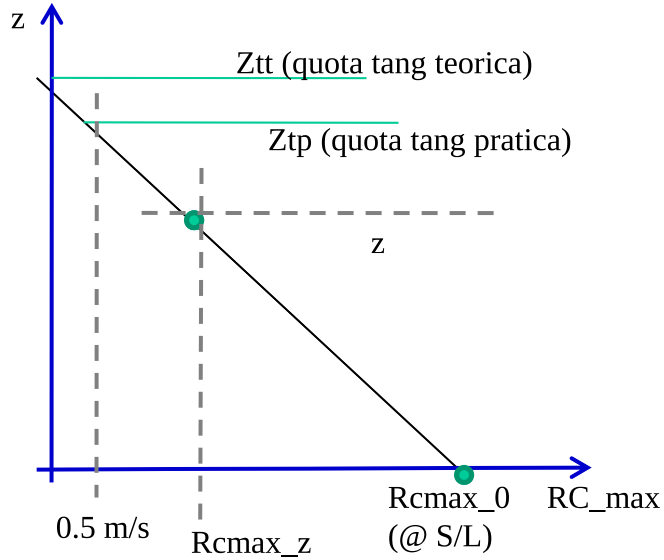
Ed una quota di tangenza teorica e pratica pari a :

$$Z_{TT} = 10670 - \frac{1.9}{b} = 10670 + 1258 = 11928 m$$

$$Z_{TP} = 10670 - \frac{(1.9 - 0.5)}{b} = 11600\ m$$

Pari a circa 39,000 ft e 38,000 ft. (risultato corretto ed in linea con le curve reali viste all'inizio del capitolo e riportate anche alla pagina precedente.

QUOTA TANGENZA Velivoli a getto



Estrapolazione, jet metodo diretto

Nel caso di velivolo a getto, scriviamo:

$$RC_{MAX} = \frac{\Pi_d - \Pi_{no}}{W} = \frac{(T_{d,E} \cdot V_E - D_E \cdot V_E)}{W}$$

Alla quota di tangenza teorica avremo:

$$RC_{MAX,z} = \frac{(T_0 \cdot \sigma \cdot 0.75) \cdot \frac{V_{E_0}}{\sqrt{\sigma}} - D_E \cdot \frac{V_{E_0}}{\sqrt{\sigma}}}{W} = 0$$

$$RC_{MAX,z} = \frac{V_{E_0}}{\sqrt{\sigma}} \cdot \left(T_0 \cdot \sigma \cdot 0.75 - D_E\right) = 0$$

$$\sigma_{TT} = \frac{D_E}{T_0 \cdot 0.75}$$

Applicandolo al caso precedente:

$$\sigma_{TT} = \frac{3633}{18144 \cdot 0.75} = 0.267$$

Cioè 11810 m pari a 38750 ft

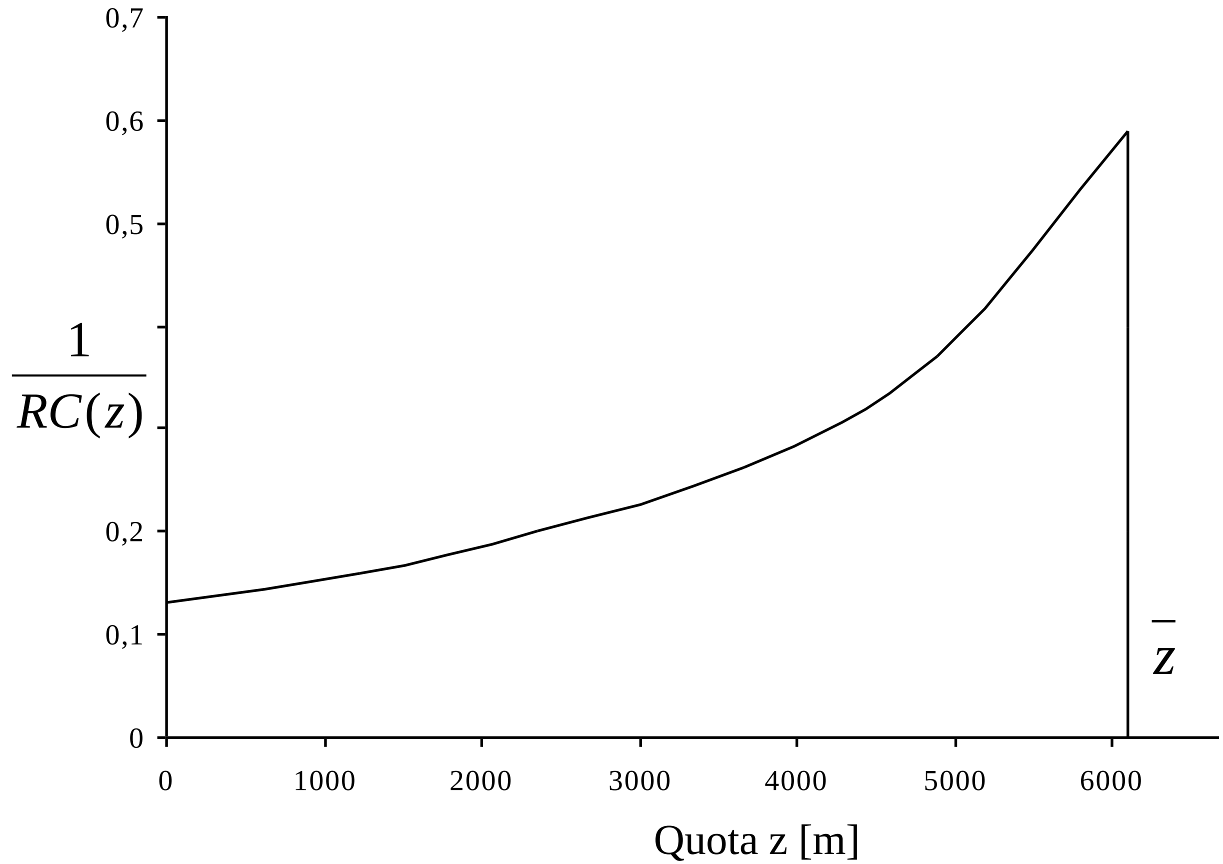
E' evidente che con tale approccio non può essere trovata la quota tangenza pratica, che deve essere calcolata per interpolazione tra la tangenza ed una quota elevata (es 25,000 o 30,000 ft) alla quale viene calcolato RC massimo.

TEMPO DI SALITA

RC=dz/dt

$$dt = \frac{dz}{RC} \qquad t = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{RC} \qquad t = \int_0^{\bar{z}} \frac{dz}{RC(z)}$$

Partendo da S/L



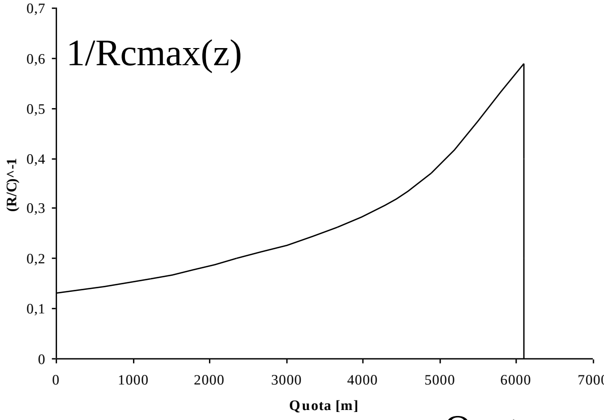
Il tempo impiegato per arrivare a quota $\bar{z}$ a partire da quota zero (S/L) è l'integrale (area sottesa)

In pratica il tempo è quella che in analisi può essere definita una funzione integrale, nella quale la variabile indipendente è l'estremo di integrazione di una data funzione

TEMPO Minimo DI SALITA

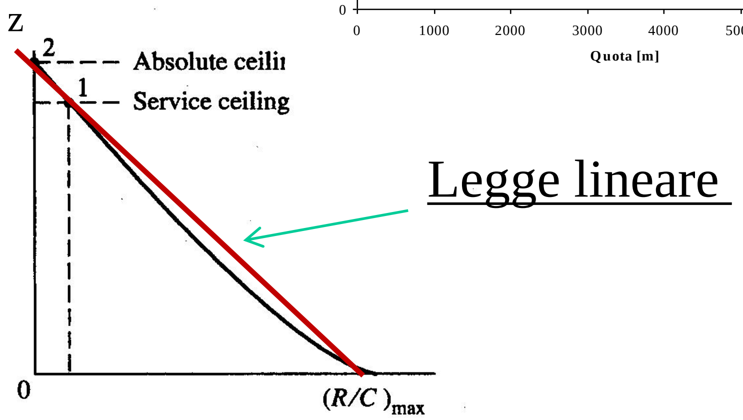
Se si vuole il tempo minimo bisogna usare il massimo RC ad ogni quota

$$t_{\min}(\bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \frac{dz}{(RC_{\max}(z))}$$



Se assumiamo come legge di RCmax(z) una legge lineare:

$$RC_{\max}(z) = a + b \cdot z$$



$$t_{\min} = \int_0^z \frac{dz}{RC_{MAX}} = \int_0^h \frac{dz}{a + b \cdot z}$$

Tempo minimo per arrivare a quota z

$$\boxed{t_{\min} = \frac{1}{b}\left[\ln(a + b \cdot z) - \ln(a)\right]}$$

Ad esempio, con i valori di a e b ricavati nell'esempio precedente:
a= 13.28 [m/s] e b=-0.001456 [1/s]

Il tempo che il velivolo impiega ad arrivare alla quota di crociera di 6000 m è:

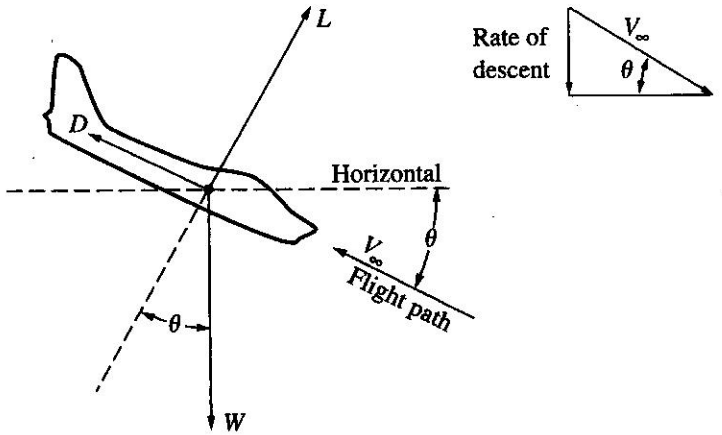
$$\boxed{t_{\min} = -\frac{1}{0.001456}\left[\ln(4.55) - \ln(13.28)\right] = -\frac{(1.51 - 2.58)}{0.001456} = \frac{1.07}{0.001456} = 736\,\mathrm{s} = 12.27\,\mathrm{min}}$$

VOLO LIBRATO

$$\operatorname{Tan}\theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$

$$L = W\cos\theta$$

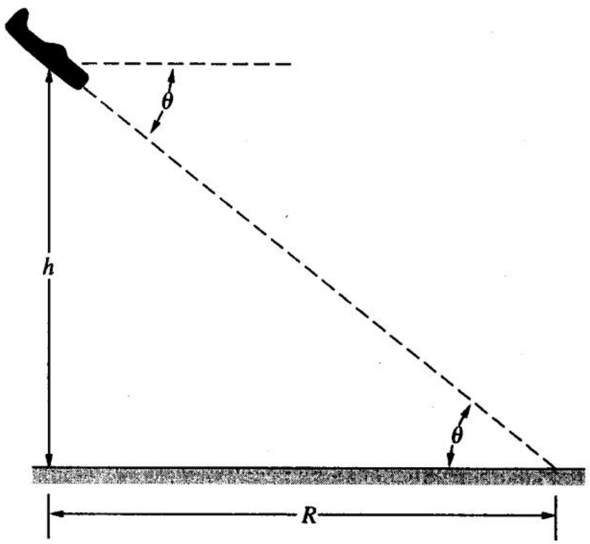
$$D = W\sin\theta$$

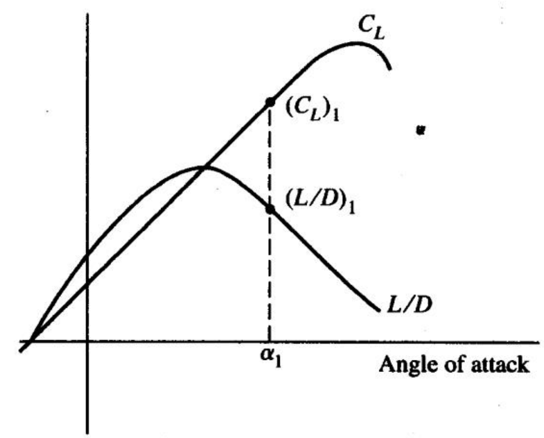


$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{D}{L}$$

$$Tan\,\theta = \frac{1}{L/D}$$

$$Tan\,\theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$





VOLO LIBRATO

$$Tan\theta = \frac{1}{(L/D)} \qquad\qquad Tan\theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$

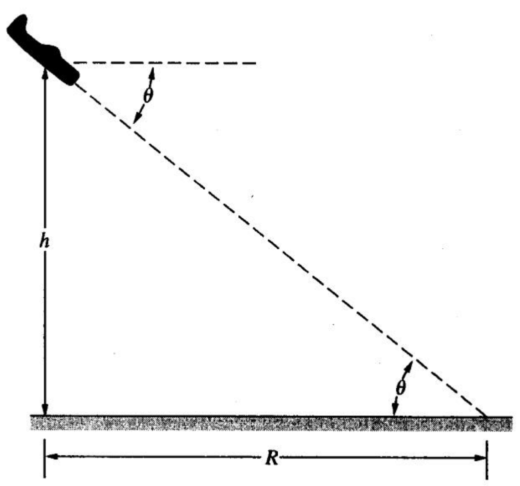
L'angolo di planata minimo non dipende dalla quota, dal carico alare o cose simili, ma SOLO dall'EFFICIENZA MASSIMA !

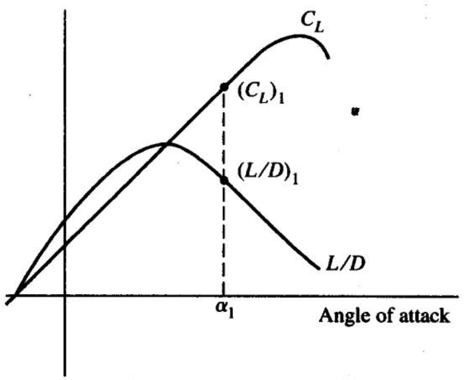
Se vogliamo ottenere la distanza percorribile *R* dal velivolo a partire da una quota iniziale h :

$$R = \frac{h}{\tan\theta} = h \cdot E = h \cdot \frac{C_L}{C_D} \qquad\qquad R_{MAX} = \frac{h}{\tan\theta_{\min}} = h \cdot E_{MAX}$$

Quindi tale valutazione è abbastanza banale. Se un velivolo ad esempio parte da quota 10,000 m ed ha efficienza massima pari a 15 percorrerà al massimo 150 Km, volando sempre all'assetto del punto E.

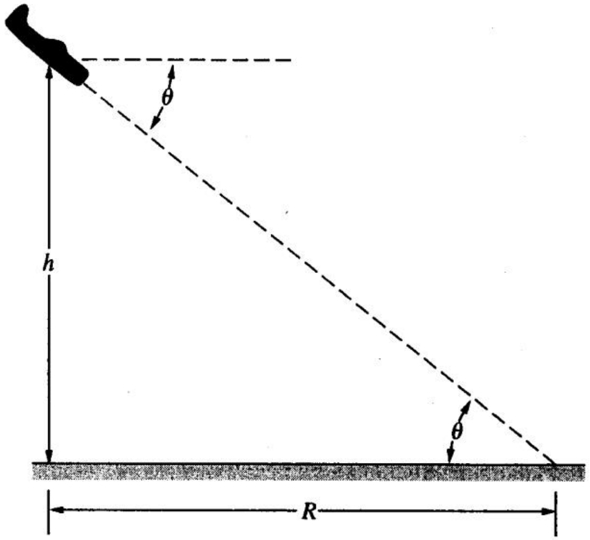
$$R_{MAX} = 10{,}000m \cdot 15 = 150Km$$

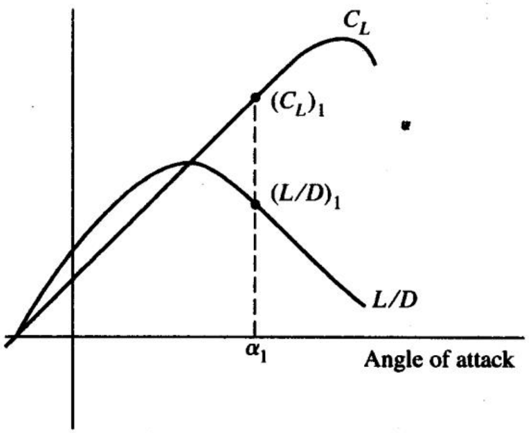




VOLO LIBRATO

$$Tan\theta_{min} = \frac{1}{(L/D)_{max}}$$





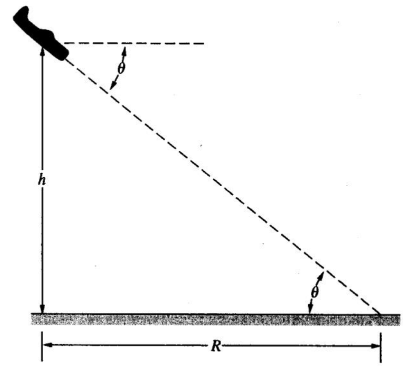
$$L = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S C_L$$

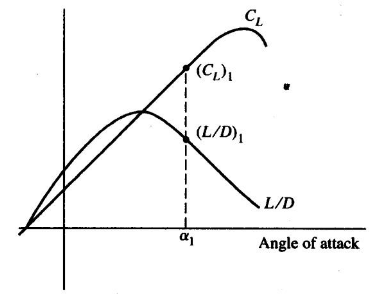
$$\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S C_L = W\cos\theta$$

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2\cos\theta}{\rho_\infty C_L}\frac{W}{S}}$$

VOLO LIBRATO

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2\cos\theta}{\rho_\infty C_L}\frac{W}{S}}$$



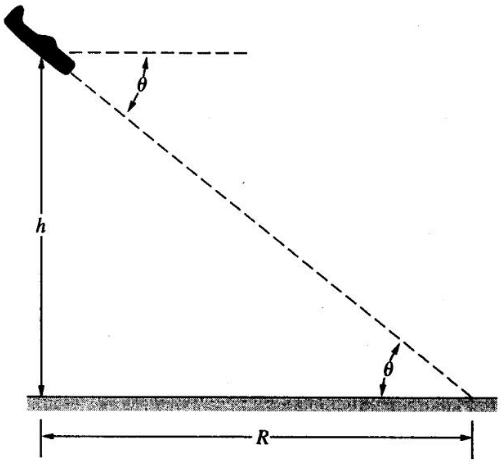


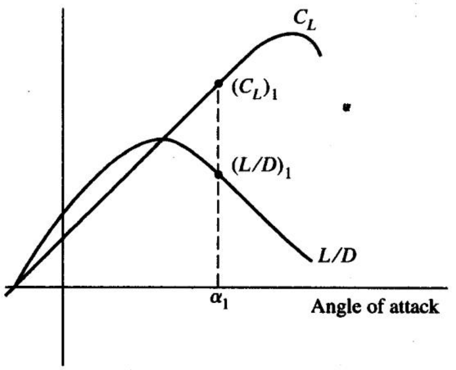
è la velocità di planata di equilibrio. Chiaramente essa dipende dalla quota) e dal carico alare. Il valore di *CL* nell'Eq. [8.24] è quel valore particolare che corrisponde al valore specifico di *L/D* usato nell'Eq. [8.22]. Ricordiamo che sia *CL* che *L/D* sono caratteristiche aerodinamiche dell'aereo che variano con l'angolo d'attacco, come mostrato in Fig. 5.41. Si noti dalla Fig. 5.41 che un determinato valore di *L/D*, indicato con (*L/D*), corrisponde ad un determinato angolo d'attacco , che successivamente impone il coefficiente di portanza (*CL*). Se *L/D* è mantenuto costante per tutta la traettoria di planata, allora *CL* è costante lungo la traiettoria. Comunque la velocità di equilibrio cambierà con la quota lungo questa traiettoria, diminuendo al diminuire della quota.

VOLO LIBRATO

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2\cos\theta}{\rho_\infty C_L}\frac{W}{S}}$$

$$Tan\theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$





Consideriamo di nuovo il caso di minimo angolo di planata come trattato con l'Eq. [8.23]. Per un tipico aeroplano moderno, (*L/D*)max = 15, e per questo caso, dall'Eq. [8.23],

$$\theta_{\min} = 3.8°$$

è un angolo piccolo. Quindi possiamo ragionevolmente $\cos\theta = 1$

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{1}{4C_{D,0}K}}$$

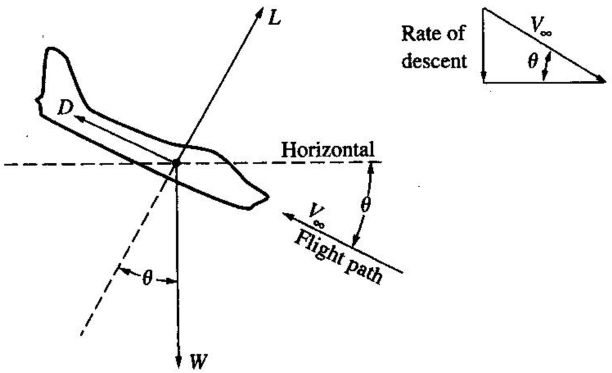
$$V_{(L/D)_{\max}} = \left(\frac{2}{\rho_\infty}\sqrt{\frac{K}{C_{D,0}}}\frac{W}{S}\right)^{\frac{1}{2}}$$

VOLO LIBRATO

$$\operatorname{Tan}\theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$

$$Tan\,\theta = \frac{1}{(L/D)}$$

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2\cos\theta}{\rho_\infty C_L}\frac{W}{S}} \approx \sqrt{\frac{2}{\rho_\infty C_L}\frac{W}{S}}$$



A parte l'angolo di discesa (e quindi la distanza percorribile) è di interesse la velocità verticale , o anche Rateo di discesa RD. Dalla equazione di equilibrio lungo l'asse vento x, moltiplicando successivamente entrambi i membri per la V :

$$D = W\sin\theta \qquad DV_\infty = W\cdot V_\infty \sin\theta = W\cdot V_V = W\cdot RD$$

Infatti : $RD = V_V = V_\infty \sin\theta$

e quindi: $$V_V = \frac{DV_\infty}{W} \qquad RD = \frac{\Pi_{no}}{W}$$

Rateo di discesa MINIMO all'assetto del punto P (min POT nec al volo livellato)

$$RD_{\min}(z) = \frac{\Pi_{no\_P}}{W} = \frac{D_P\cdot V_P(z)}{W}$$

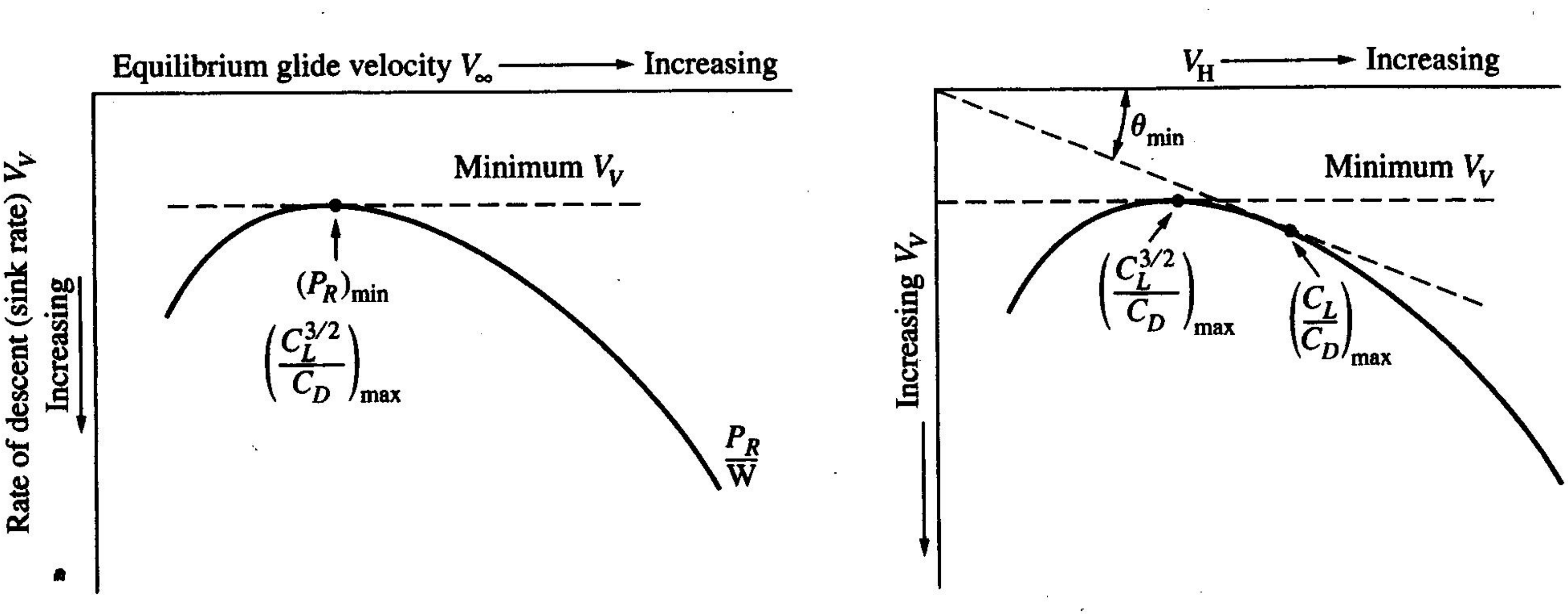
VOLO LIBRATO

RD MINIMO => POTENZA Minima

$\frac{C_L^{3/2}}{C_D}$ è massimo

Il rateo di discesa viene anche chiamato *Sink Rate* in inglese

$$\left(V_\infty\right)_{min\,velocità\,di\,discesa} = \left(\frac{2}{\rho_\infty} \sqrt{\frac{K}{3C_{D,0}} \frac{W}{S}} \right)^{1/2}$$



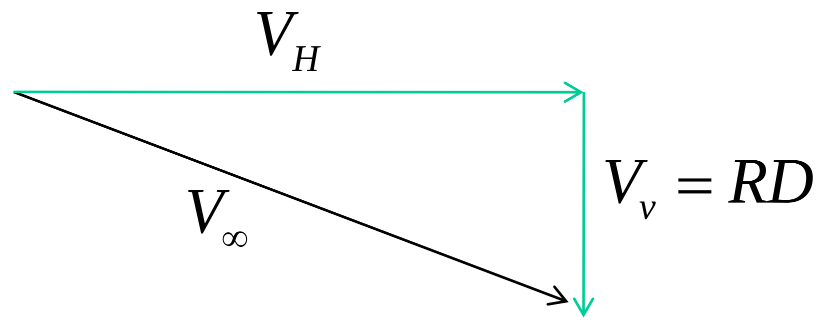
VOLO LIBRATO

ASSETTO di minimo RD e di minimo angolo sono diversi !!

$$RD = V \cdot \theta$$

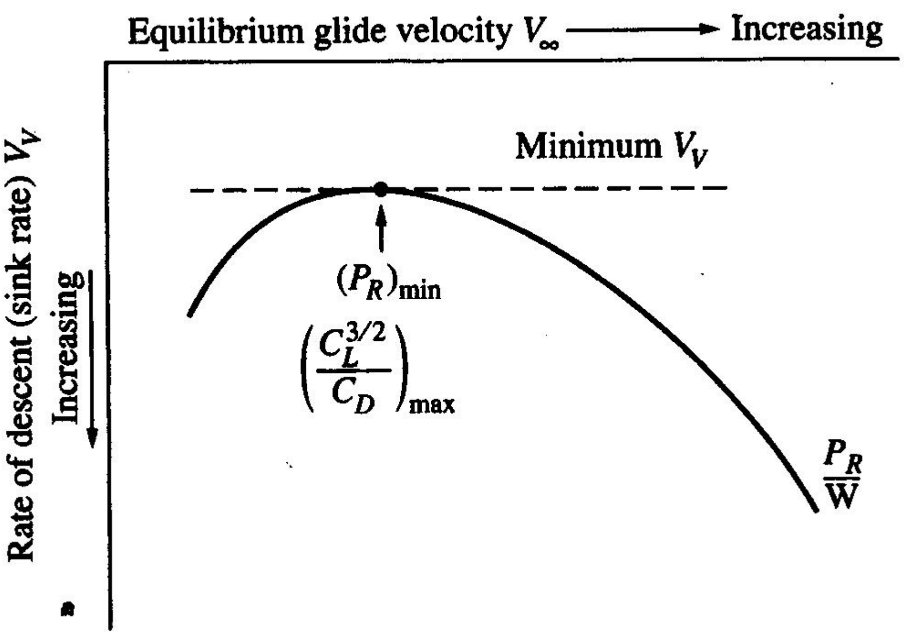
$$RD = \frac{\Pi_{no}}{W}$$

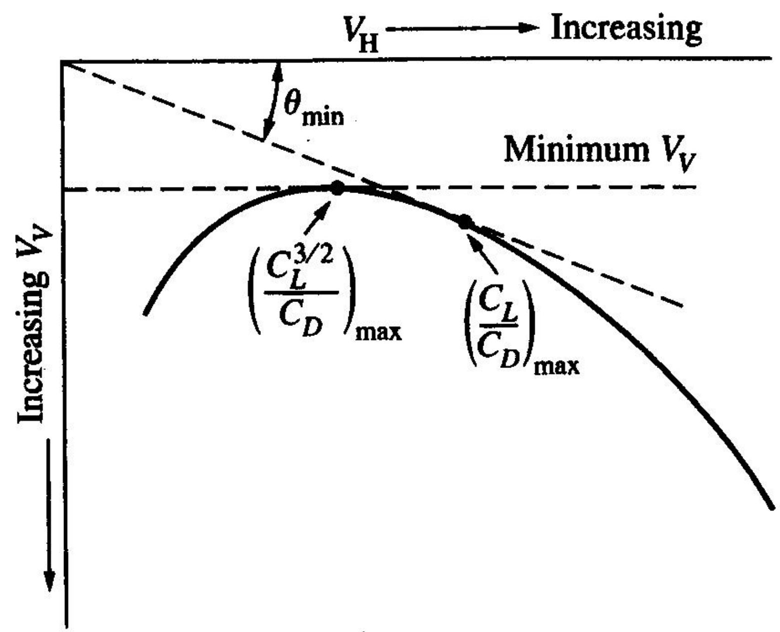
$$\theta = \frac{RD}{V} = \frac{D}{W}$$



Essendo $RD = \frac{\Pi_{no}}{W}$ la curva di RD in funzione di V è praticamente la curva della potenza necessaria ribaltata e divisa per il peso W

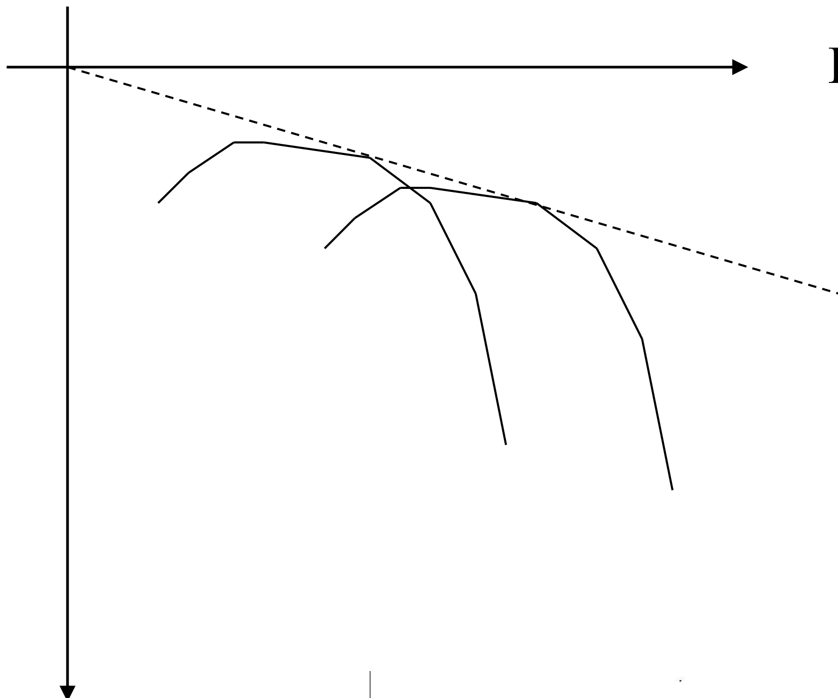
ODOGRAFO VOLO LIBRATO





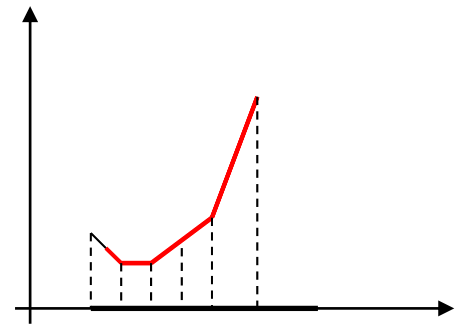
VOLO LIBRATO

La curva di RD è la curva della potenza necessaria ribaltata.

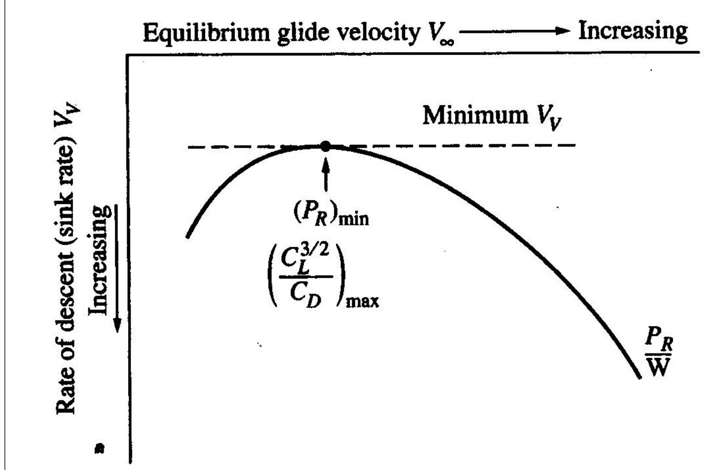


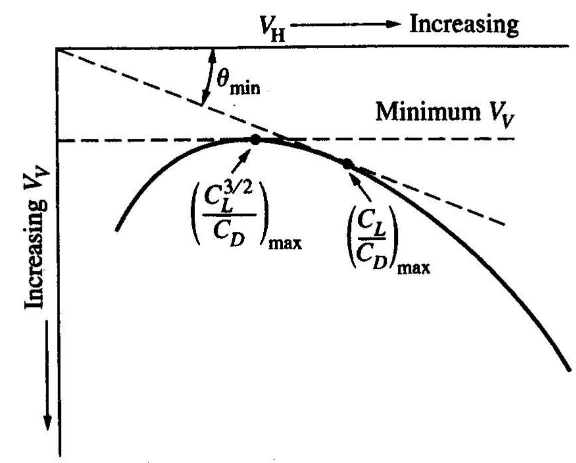
E’ come RC con potenza disponibile=0

$$RC = \frac{TV}{W} - \frac{DV}{W} = -\frac{DV}{W}$$



ODOGRAFO VOLO LIBRATO



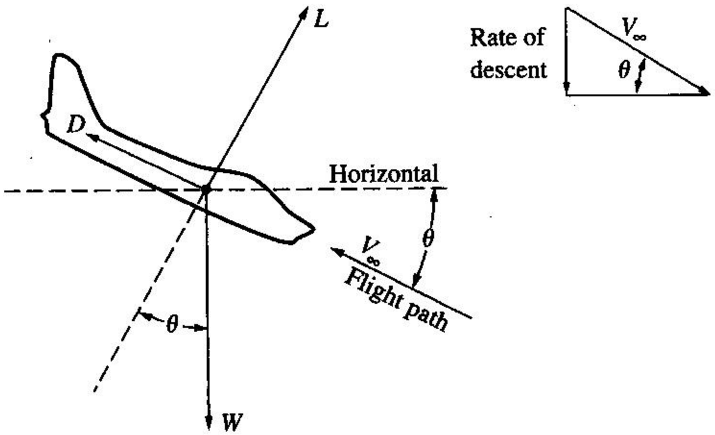


VOLO LIBRATO

$$\tan\theta_{min} = \frac{1}{(L/D)_{max}}$$

$$L = W\cos\theta$$

$$D = W\sin\theta$$



$$W\cos\theta = L = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S C_L$$

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2W\cos\theta}{\rho_\infty S C_L}}$$

$$V_V = V_\infty \sin\theta = (\sin\theta)\sqrt{\frac{2\cos\theta}{\rho_\infty C_L}\frac{W}{S}}$$

Dividendo tra loro le 2 equazioni di equilibrio

$$\sin\theta = \frac{D}{L}\cos\theta = \frac{C_D}{C_L}\cos\theta$$

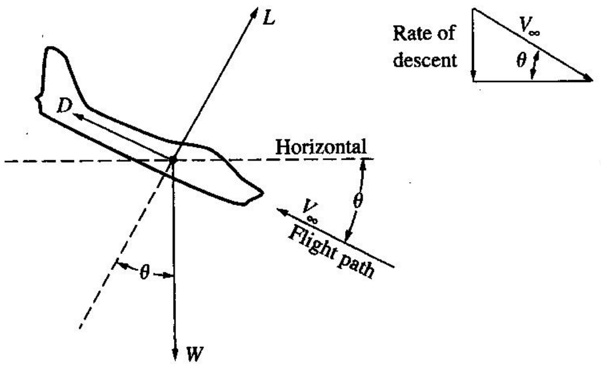
$$RD = V_V = \sqrt{\frac{2\cos^3\theta}{\rho_\infty\left(C_L^3/C_D^2\right)}\frac{W}{S}} \Rightarrow \boxed{RD = V_V = \sqrt{\frac{2}{\rho_\infty\left(C_L^3/C_D^2\right)}\frac{W}{S}}} \quad \cos\theta \approx 1$$

VOLO LIBRATO

$$L = W\cos\theta$$

$$D = W\sin\theta$$

$$\operatorname{Tan}\theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$



$$\boxed{RD = V_V = \sqrt{\frac{2}{\rho_\infty\left(C_L^3/C_D^2\right)}\frac{W}{S}}}$$

L'Equazione mostra esplicitamente che

$$\left(V_V\right)_{\min} \quad => \quad \left(C_L^{3/2}/C_D\right)_{\max}.$$

Velocità sulla traiettoria di minimo RD

$$V_P = \sqrt{\frac{2}{\rho(z)}\frac{W\cos\theta}{S}\frac{1}{C_{LP}}}$$

<u>Essa mostra inoltre che la velocità di discesa diminuisce al diminuire della quota e aumenta come la radice quadrata del carico alare.</u>

Angolo piccolo

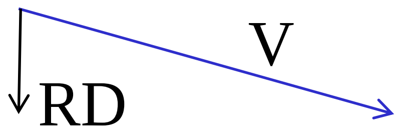
$$\cos\theta \approx 1$$

$$V_P = \sqrt{\frac{2}{\rho(z)}\frac{W}{S}\frac{1}{C_{LP}}}$$

TEMPO Massimo di volo in VOLO LIBRATO

Ricordando la definizione di rateo di discesa (NB è negativo):

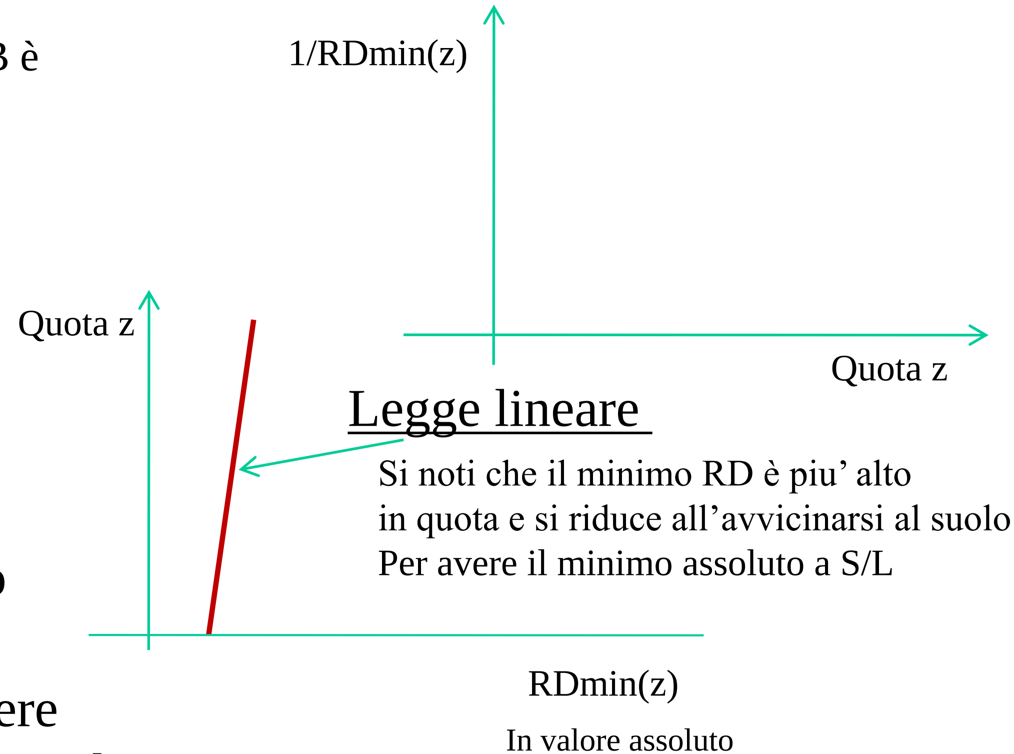
$$RD = V_z = \frac{dz}{dt}$$



Se si vuole il tempo massimo bisogna usare il Minimo RD (rateo di discesa) ad ogni quota (che è quello del punto P)

$$t_{\max}(\bar{z}) = \int_{\bar{z}}^{0} \frac{dz}{(RD_{\min}(z))}$$

Con RD negativo



Un possibile approccio è quello di assumere
Una legge lineare di RDmin(z)=RD_P(z) con la quota:

$$RD_{\min}(z) = a + b \cdot z$$

Abbiamo assunto RD positivo ed abbiamo cambiato
Gli estremi di integrazione

$$t_{\max} = \int_{0}^{z} \frac{dz}{|RD_{\min}|} = \int_{0}^{z} \frac{dz}{a + b \cdot z}$$

Tempo massimo di volo a partire da quota z

$$\boxed{t_{\max} = \frac{1}{b}\left[\ln(a + b \cdot z) - \ln(a)\right]}$$

TEMPO Massimo di volo in VOLO LIBRATO

$$t_{\max} = \frac{1}{b}\left[\ln\left(a + b \cdot z\right) - \ln(a)\right]$$

Ad esempio, dato un velivolo Cessna SkyHawk
con i seguenti dati:
Peso W=1090 Kg
Apertura alare b=10.9 m   S=16.2 m^2   AR=7.33
CDo=0.028   e=0.80;
E_{MAX} = 12.83
Se si fissa una quota di partenza in volo librato di 3000 m; si ha:

A quota 3000 m :	V_E=44.9 m/s	V_P=34.1 m/s	(TAS)
	Π_{nE}=37.5 kW	Π_{nP}=32.9 kW	
	RD_E=3.50 m/s	RD_P=3.07 m/s	Rateo inteso in valore assoluto
A quota S/L (=0 m)	V_E=38.7 m/s	V_P=29.4 m/s	(TAS)
	Π_{nE}=32.3 kW	Π_{nP}=28.3 kW	
	RD_E=3.01 m/s	RD_P=2.65 m/s	Rateo inteso in valore assoluto

A partire da 3000 m, la massima distanza percorribile Rmax sarà (si otterrà volando sempre all'assetto del punto E) :

R_{max}= E_{MAX} *3000 m
= 38490 m=38.5 Km

TEMPO Massimo di volo in VOLO LIBRATO

A quota 3000 m : V_E=44.9 m/s V_P=34.1 m/s (TAS)

Π_{nE}=37.5 kW Π_{nP}=32.9 kW

RD_E=3.50 m/s RD_P=3.07 m/s

A quota S/L (=0 m) V_E=38.7 m/s V_P=29.4 m/s (TAS)

Π_{nE}=32.3 kW Π_{nP}=28.3 kW

RD_E=3.01 m/s RD_P=2.65 m/s

Quindi all'assetto del punto P il velivolo ha il minimo rateo di discesa RD.

Il rateo è pero' funzione della quota passando da 3.07 m/s a quota 3000 fino a 2.65 m/s a S/L.

Assumendo una legge lineare per il rateo di discesa in P (rateo minimo), sempre inteso positivo:

$$RD_{\min}(z) = a + b \cdot z$$

a= 2.65 m/s b=(3.07-2.65)/3000=0.00014 (1/s)

Il tempo massimo di volo librato a partire da una quota di 3000 m sarà quindi:

$$t_{\max}(\bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \frac{dz}{(RD_{\min}(z))}$$

Con RD assunto positivo

$$\boxed{t_{\max} = \frac{1}{b}\left[\ln\left(a + b \cdot z\right) - \ln(a)\right] = \frac{1}{0.00014} \cdot \left[\ln(3.07) - \ln(2.65)\right] = \frac{0.1471}{0.00014} = 1050.8\,\mathrm{s}}$$

$$\boxed{t_{\max} = 17.5\,\mathrm{min}}$$

TEMPO Massimo di volo in VOLO LIBRATO

In effetti è possibile ricavare una **relazione analitica**, a prescindere dall'assunzione della legge lineare di RD con la quota, e risolvere il problema in modo elegante.

$$t_{\max}(\bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \frac{dz}{(RD_{\min}(z))}$$

Infatti :

$$RD_{\min}(z) = \frac{\Pi_{no\_P}}{W} = \frac{D_P \cdot V_P(z)}{W} = \frac{D_P \cdot V_{Po}}{W}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$$

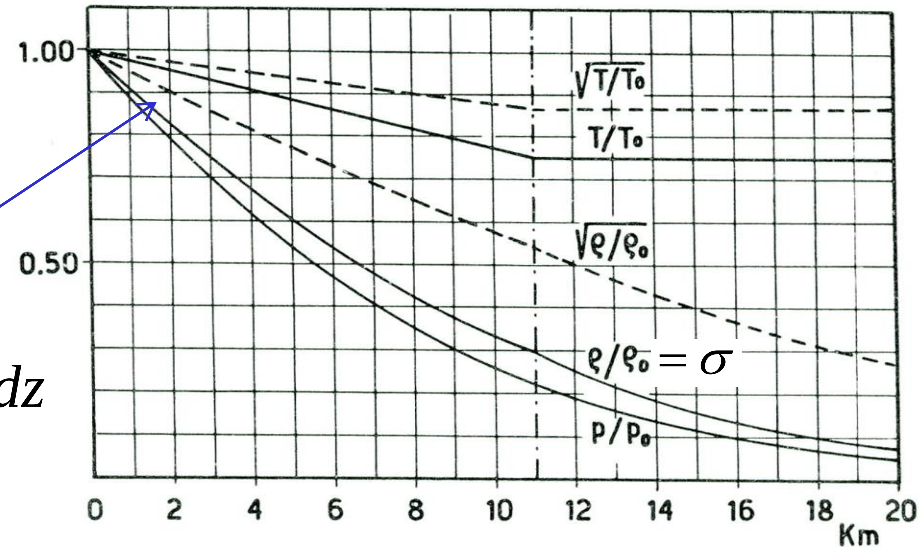
Infatti la velocità del punto P (e anche la potenza necessaria minima) dipendono propro dalla radice del rapporto delle densità. Se nell'integrale cambio la variabile indipendente passando dalla quota z al relativo rapporto delle densità sigma , poiché per quote basse (vedi cap 1) si puo' vedere che la variazione della densità relativa con la quota è abbastanza lineare (vedi grafico)

$$\sigma(z) = \left(\frac{288.15 - 0.0065 \cdot z}{288.15}\right)^{4,256}$$

Fino a quota di 4000 m si può assumere lineare , con un gradiente pari a -0.092/km, (vedi tabelle ISA) cioè:

$$d\sigma = -\frac{0.092}{(1000 \cdot m)} dz$$

$$dz = -(10869.5 \cdot m) \cdot d\sigma$$



TEMPO Massimo di volo in VOLO LIBRATO

Quindi l'integrale diventa: $dz = -\frac{(1000 \cdot m)}{0.092} \cdot d\sigma$

$$t_{\max}(\bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \frac{dz}{(RD_{\min}(z))} \qquad t_{\max}(\bar{\sigma}) = -\frac{(1000 \cdot m)}{0.092} \int_1^{\bar{\sigma}} \frac{d\sigma}{RD_{\min}(\sigma)}$$

Essendo :

$$RD_{\min}(\sigma) = \frac{\Pi_{no\_P}}{W} = \frac{D_P \cdot V_{Po}}{W} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} = \frac{RD_P(z=0)}{\sqrt{\sigma}}$$

$$t_{\max}(\bar{\sigma}) = \frac{1}{RD_{Po}} \cdot \frac{1000}{0.092} \int_{\sigma}^{1} \sqrt{\sigma} \cdot d\sigma \qquad \text{con} \qquad RD_{Po} = \frac{D_P \cdot V_{Po}}{W}$$

$$t_{max}(\bar{\sigma}) = \frac{1}{RD_{Po}} \cdot \frac{1000}{0.092} \cdot \frac{2}{3} \left[\sigma^{3/2}\right]_{\sigma}^{1}$$

$$\boxed{t_{\max}(\sigma) = \frac{1}{RD_{Po}} \frac{2000}{0.276} \left[1 - \sigma^{3/2}\right]}$$

FORMULA DIRETTA che fornisce il Tempo massimo di volo a partire dalla quota Con rapp densità pari a sigma

TEMPO Massimo di volo in VOLO LIBRATO

$$t_{\max}(\sigma) = \frac{1}{RD_{Po}} \frac{2000}{0.276}\left[1-\sigma^{3/2}\right]$$

$$t_{\max}(\sigma) = \frac{7246.38}{RD_{Po}}\left[1-\sigma^{3/2}\right]$$

Nel caso precedente del Cessna SkyHawk, essendo :

A quota S/L (=0 m)	VE=38.7 m/s	VP=29.4 m/s (TAS)
	ΠnE=32.3 kW	ΠnP=28.3 kW
	RDE=3.01 m/s	RDP=2.65 m/s

$$RD_{Po} = 2.65\, m/s$$

A partire dalla quota di 3000 m , essendo sigma pari a $\sigma(z = 3000m) = 0.74$

$$t_{\max}(\sigma) = \frac{7246.38}{2.65}\left[1-0.74^{3/2}\right] = 994\, s = 16.6\,\text{min}$$

Che è più corretto (ma non molto diverso) dal valore trovato considerando andamento di RD lineare con la quota e riportato a pag 47 precedentemente (pari a 1050.8 sec).

TEMPO Massimo di volo in VOLO LIBRATO

Gli alianti, grazie agli allungamenti alari molto elevati hanno efficienze aerodinamiche elevatissime e ratei di discesa molto bassi.
Infatti ALIANTE ASW24 :
Peso W=305 Kg (senza water ballast)
Apertura alare b=15 m S=10 m^2 AR=22.5
CDo=0.0090 (l'aliante ha un Cdo molto basso, essendoci ala con profilo laminare che opera a basso Reynolds , con Cd di profilo pari a circa 0.0040 e fusoliera a bassissima resistenza.

Il fattore di Oswald è anch'esso molto alto, l'ala ha una distribuzione di portanza quasi ellittica, quindi e=0.98.
Con tali dati l'efficienza massima è pari a **E_{MAX} = 44**

A quota 3000 m :	VE=28.9 m/s	VP=21.9 m/s	(TAS)
	ΠnE=1.97 kW	ΠnP=1.73 kW	
	RDE=0.66 m/s	**RDP=0.58 m/s**	
A quota S/L (=0 m)	VE=24.8 m/s (89 Km/h)	VP=18.9 m/s (68 Km/h)	(TAS)
	ΠnE=1.70 kW	ΠnP=1.49 kW	
	RDE=0.57 m/s	**RDP=0.50 m/s**	

TEMPO Massimo di volo in VOLO LIBRATO

ALIANTE ASW24

A quota S/L (=0 m) VE=24.8 m/s (89 Km/h) VP=18.9 m/s (68 Km/h) (TAS)

ΠnE=1.70 kW ΠnP=1.49 kW

RDE=0.57 m/s **RDP=0.50 m/s**

Quindi abbiamo un rateo di discesa pari a circa 0.5 m/s. E' evidente che con efficienza massima pari a 44, a partire da un quota di 3000 m , l'aliante percorre fino a 132 Km (= 3000 m x 44).

I dati calcolati, a parte la velocità (leggere diff. dovute alla non perfetta parabolicità della polare aerodinamica), collimano bene con i dati sperimentali di volo, che mostrano il rateo di discesa in funzione della V (la cosidetta *speed-polar*, o odografa del volo librato) vista in precedenza. Applicando la formula trovata precedentemente, possiamo valutare il tempo massimo in volo librato dell'aliante:

$$t_{\max}(\sigma) = \frac{1}{RD_{Po}} \frac{2000}{0.276} \left[1 - \sigma^{3/2}\right]$$

$$t_{\max}(\sigma) = \frac{1}{0.50} \frac{2000}{0.276} \left[1 - 0.74^{3/2}\right] = 5267\,\text{s} = 87.8\,\text{min}$$

Che mostra le capacità di un veleggiatore di volare senza motore

TEMPO Massimo di volo in VOLO LIBRATO

ALIANTE ASW24

A quota S/L (=0 m) VE=24.8 m/s (89 Km/h) VP=18.9 m/s (68 Km/h) (TAS)

ΠnE=1.70 kW ΠnP=1.49 kW

RDE=0.57 m/s **RDP=0.50 m/s**

Si noti che il diagramma è fatto considerando laCAS e non la TAS