Università degli Studi di Napoli Federico II
Accademia Aeronautica

Laurea in
Gestione dei Sistemi Aerospaziali per la Difesa
(GESAD)

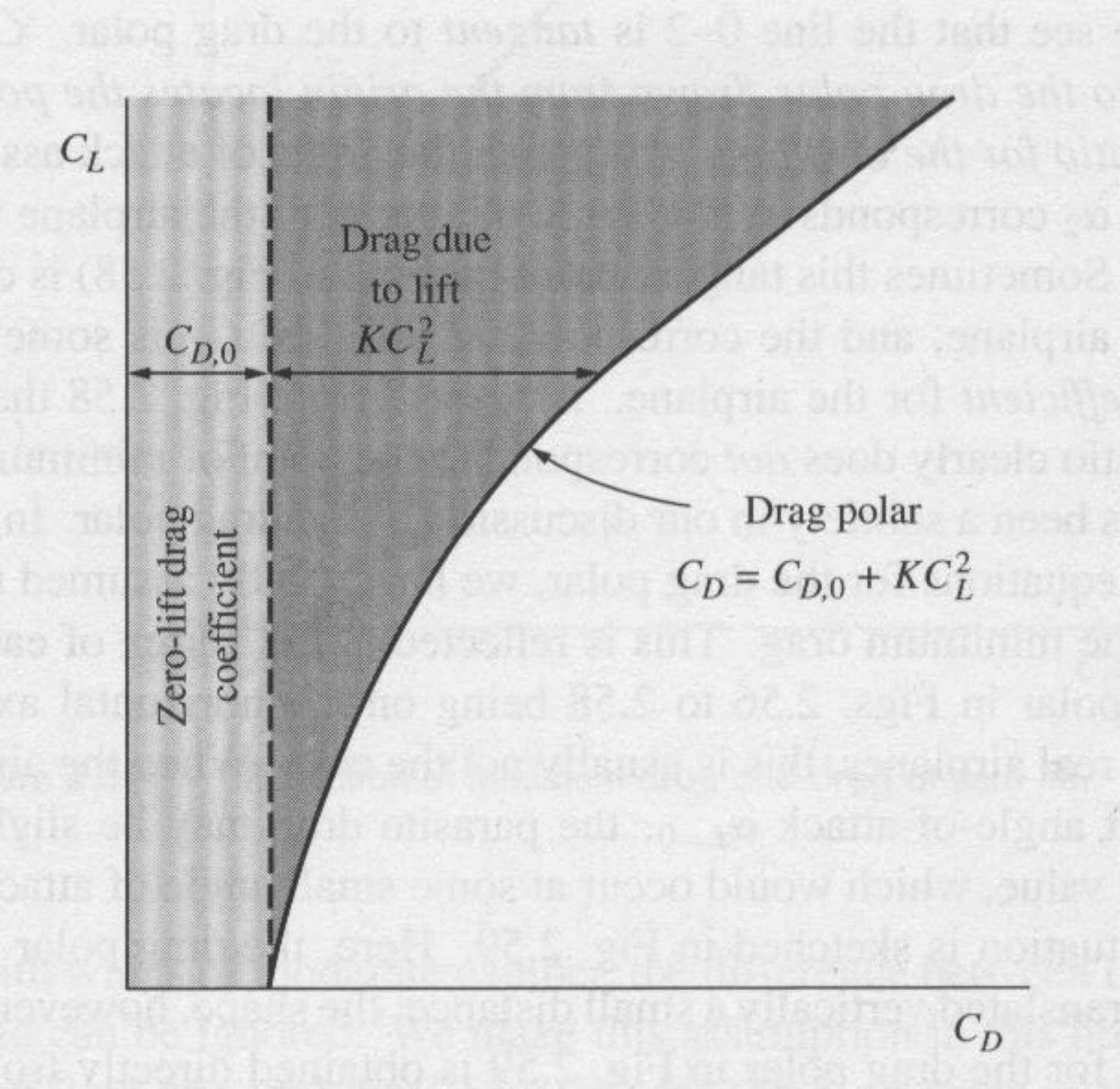
Corso di
MECCANICA DEL VOLO

Le Polari Tecniche del Velivolo

(Curve di spinta e potenza necessaria al volo)

Prof. A. De Marco

Polari tecniche

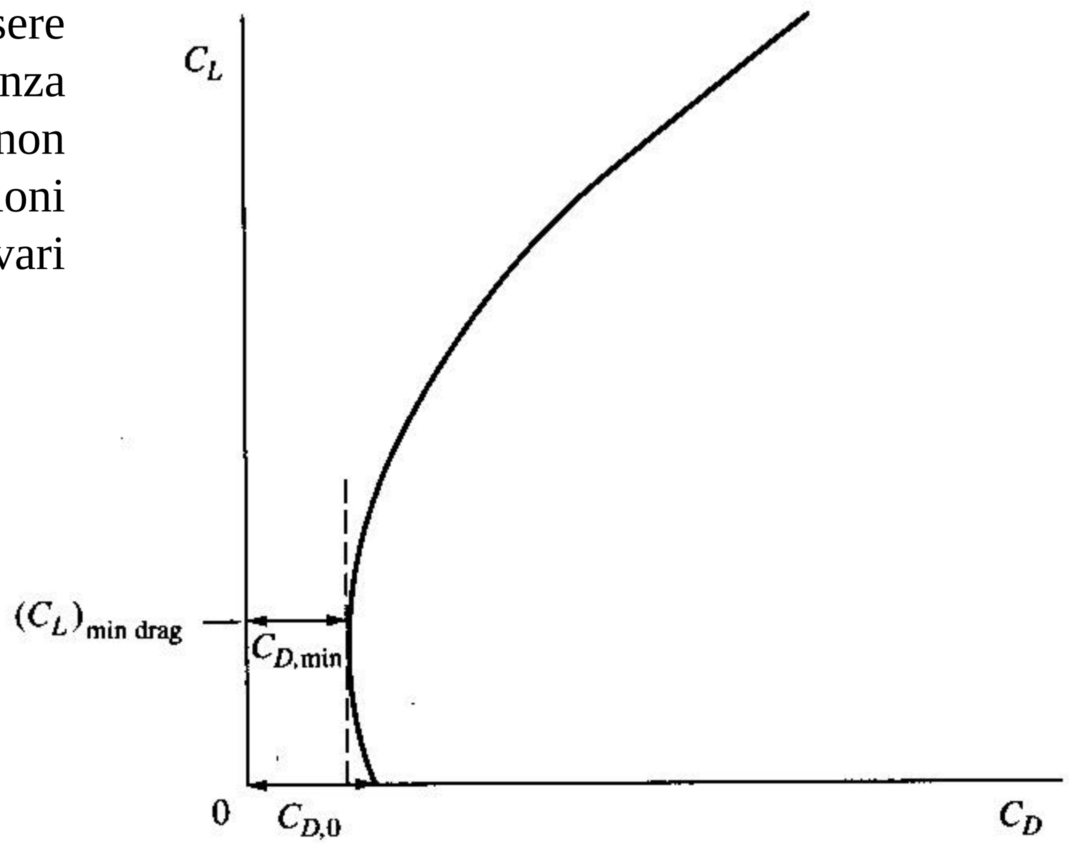


Polari tecniche

$$CD = CD_{min} + K\left(CL - CL_{min\_drag}\right)^2$$

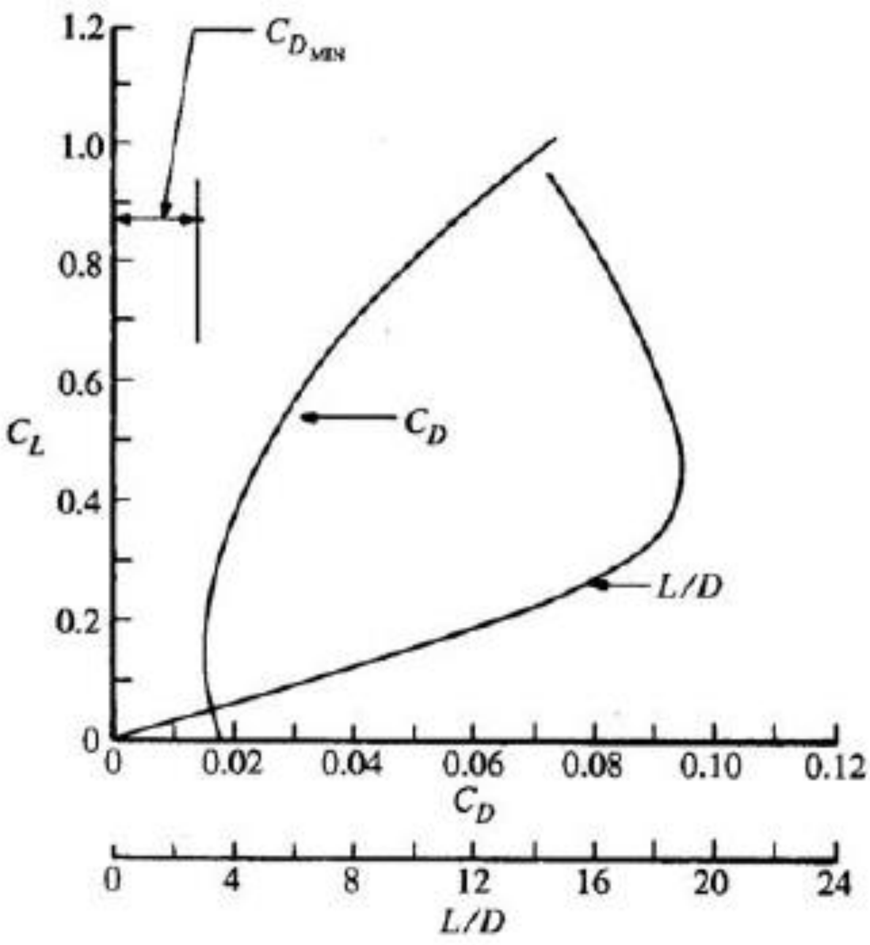
Polare parabolica ad asse spostato

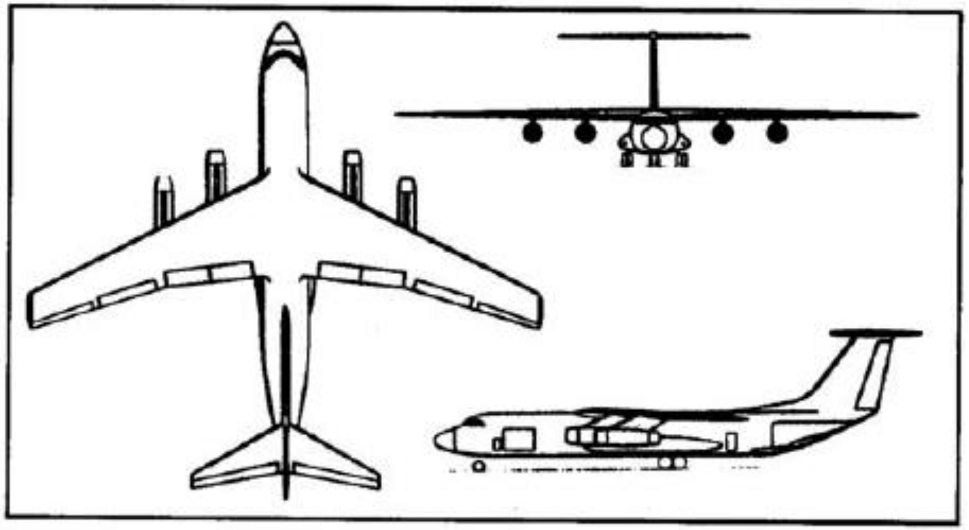
Anche se tale modello potrebbe essere più rispondente alla polare di resistenza reale, la complessità dell'equazione non permetterebbe di ricavare le relazioni semplici che esprimono i legami tra i vari punti caratteristici.



Polari tecniche

Lockheed C141 A

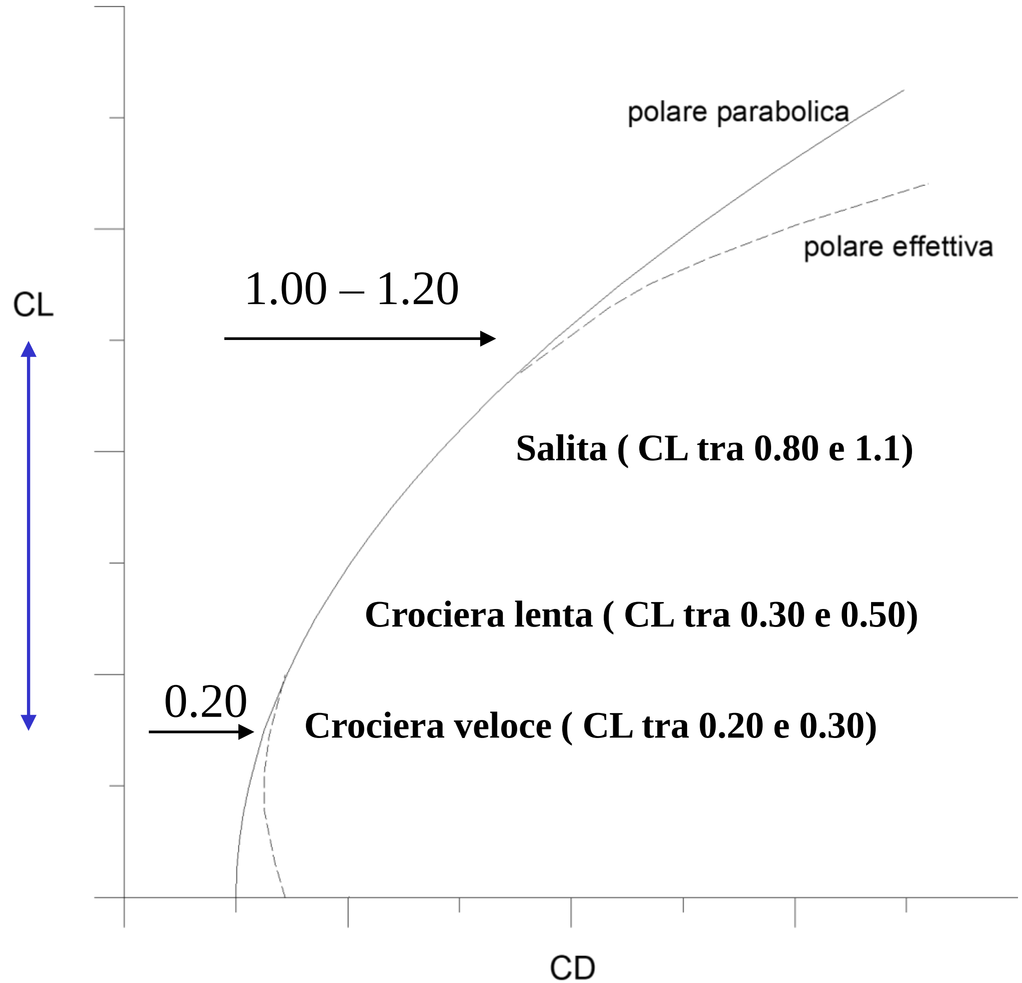




Polari tecniche

La polare parabolica
(anche ad asse non spostato)
approssima bene i regimi in cui il velivolo OPERA effettivamente

Il velivolo solitamente vola in questo range di assetti:
- crociera veloce 0.20-0.30
- crociera lenta 0.30-0.50
- salita 0.90-1.20



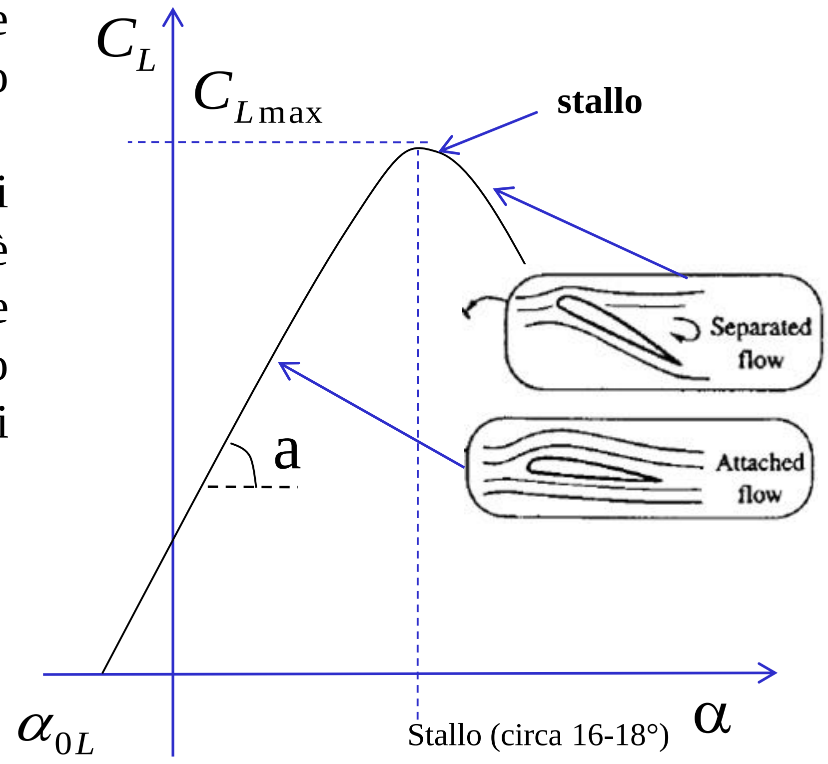
Quindi CONVIENE MOLTO OPERARE CON LA POLARE PARABOLICA ! (Equazione semplice e rispondenza con quella effettiva nel range di CL usati per il volo e per il calcolo delle prestazioni)

Polari tecniche – VELOCITÀ DI STALLO

La velocità di stallo è la minima velocità di sostentamento a quota costante.

La curva di portanza del velivolo prevede un legame lineare con l'angolo d'attacco ed un valore massimo di coefficiente di portanza allo stallo.

Per un velivolo con ala senza ipersostentatori estesi (configurazione di crociera) il CL massimo è variabile tra 1.4 ed 1.6 a seconda del valore di AR e freccia dell'ala. Dalla relazione di equilibrio portanza=peso si ricava una relazione tra velocità di volo e coefficiente di portanza.



$$L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot C_L = W$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{CL}} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o \sigma}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

$$V \propto \frac{1}{\sqrt{CL}} \qquad CL = \frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{V^2} \qquad CL \propto \frac{1}{V^2}$$

$$\boxed{Vso = \sqrt{\frac{2}{\rho_o} \frac{W}{S} \frac{1}{CL_{MAX}}}}$$

Velocità di stallo a quota S/L

Quindi, incorrispondenza dello stallo CL=CLmax
Si avrà la velocità di stallo (minima velocità)

$$Vs = Vso / \sqrt{\sigma}$$

Velocità di stallo in quota

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

- La vel. Minima di sostentamento è la velocità di stallo

$$Vso = \sqrt{\frac{2}{\rho_o}\frac{W}{S}\frac{1}{CL_{MAX}}} \qquad Vs = Vso \,/ \sqrt{\sigma}$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W}{S}}\sqrt{\frac{1}{CL}} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o \sigma}}\sqrt{\frac{W}{S}}\sqrt{\frac{1}{CL}}$$

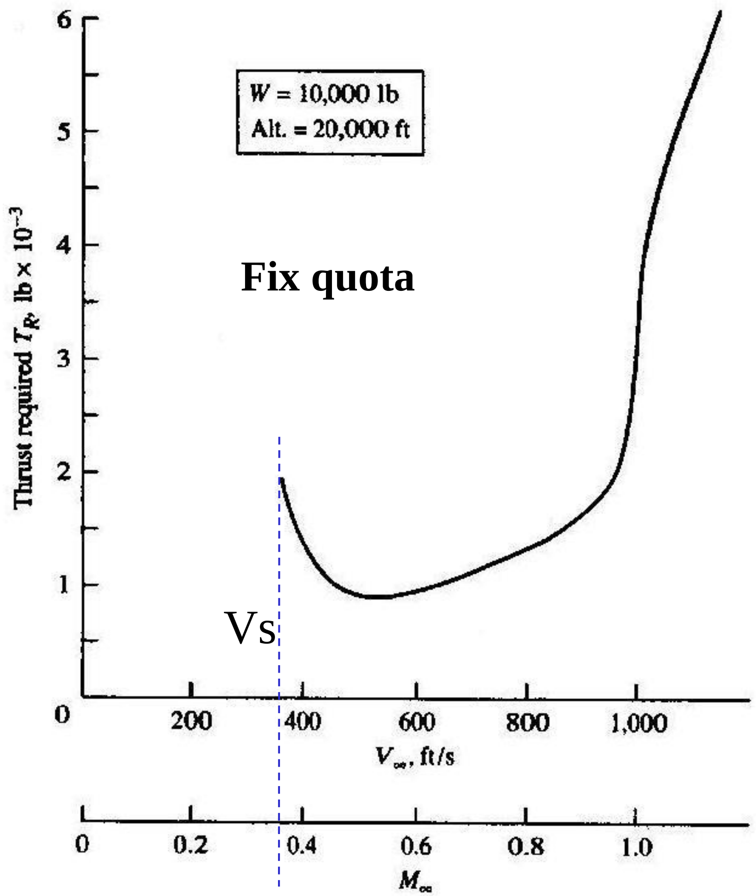
$$CL = \frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{V^2}$$

Legame tra coeff. di portanza e velocità di volo

Per data quota

$$V \propto \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

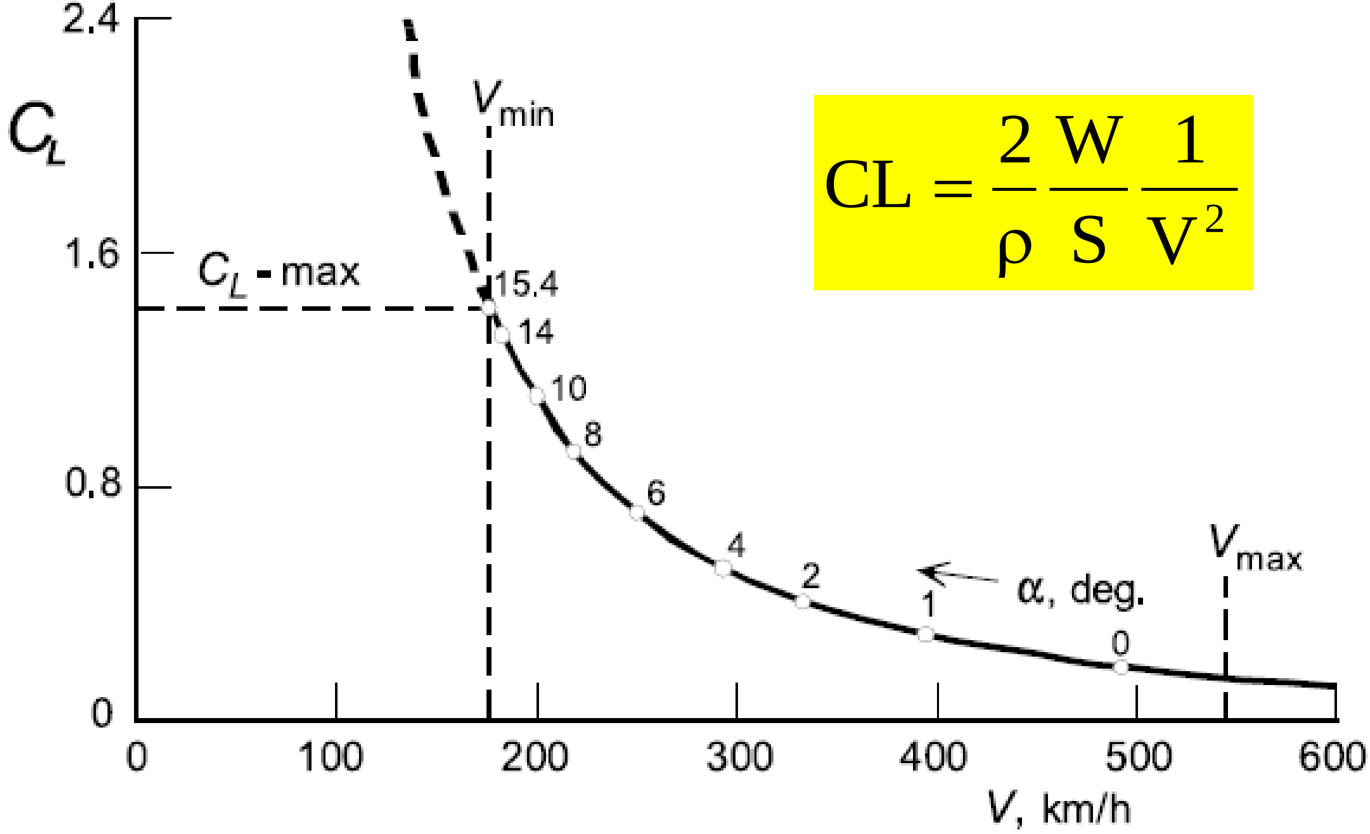
$$CL \propto \frac{1}{V^2}$$



Non ha senso calcolare la curva di resistenza per V<Vs

Ricordiamo anche che CL è legato all'angolo di attacco α

Legame tra coeff. di portanza e velocità di volo (per data:
- quota
- dati velivolo , cioè peso W e sup. alare S



$$CL = \frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{V^2}$$

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

RESISTENZA

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$$

$$C_D = C_{Do} + K C_L^2$$

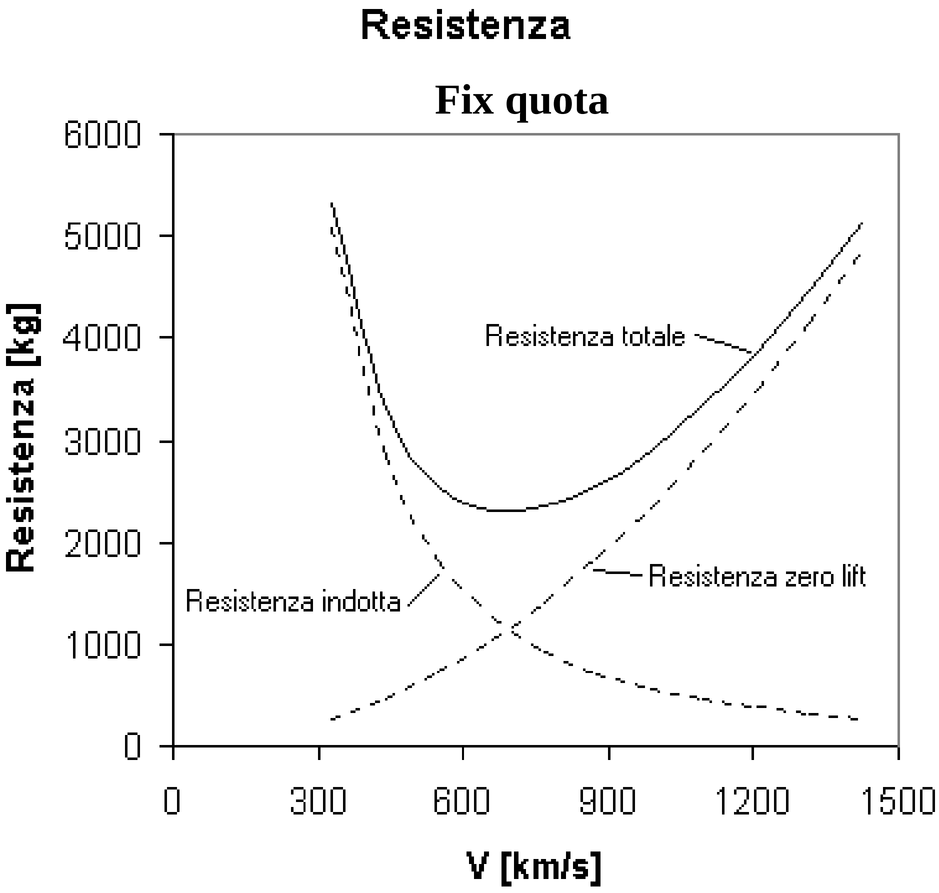
$$\boxed{\mathbf{D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{Do} + \frac{1}{2}\rho V^2 S K C_L^2}}$$

Essendo

$$CL \propto \frac{1}{V^2}$$

Il secondo termine è una funzione

$$= f\left(\frac{1}{V^2}\right)$$

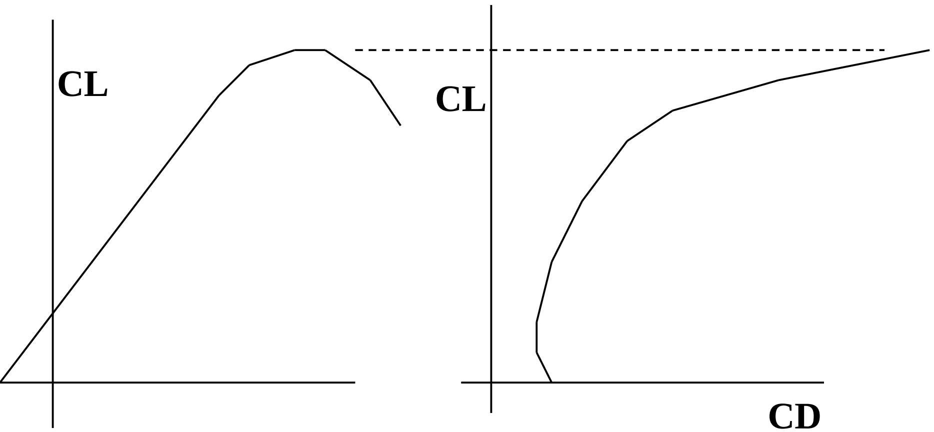


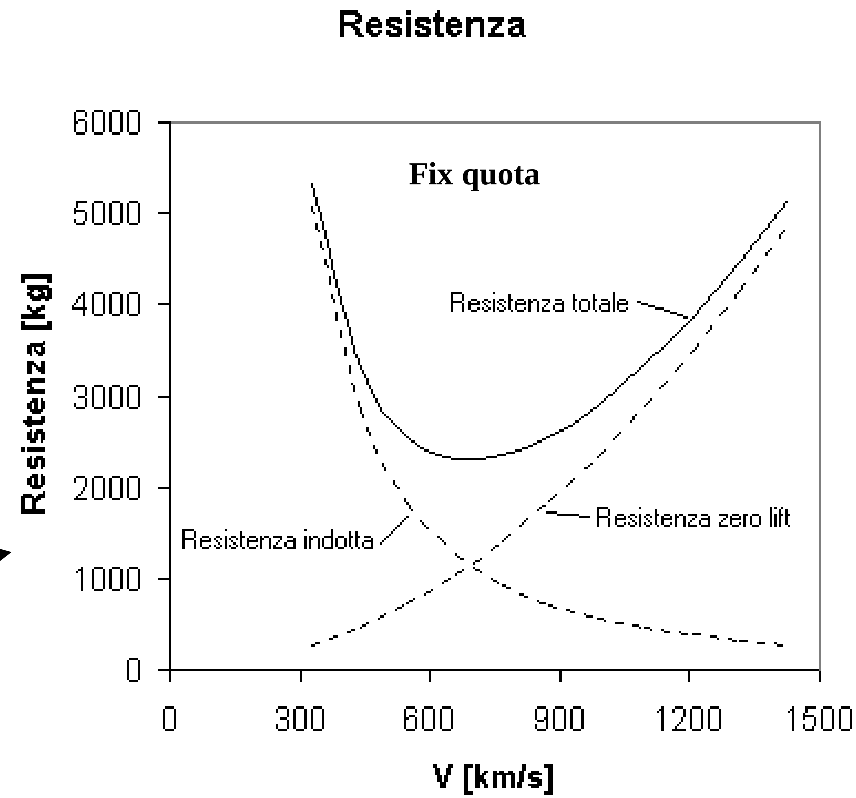
L'AEREO E' DIVERSO RISPETTO AGLI ALTRI MEZZI DI TRASPORTO
AUTO o TRENO => La resistenza aumenta all'aumentare della velocità

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

RESISTENZA

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{Do} + \frac{2KS}{\rho V^2}\left(\frac{W}{S}\right)^2$$





Polare (CL,CD)

\+

- Peso W
- Superficie alare S
- Quota ρ

\+ Ipotesi volo livellato L=W

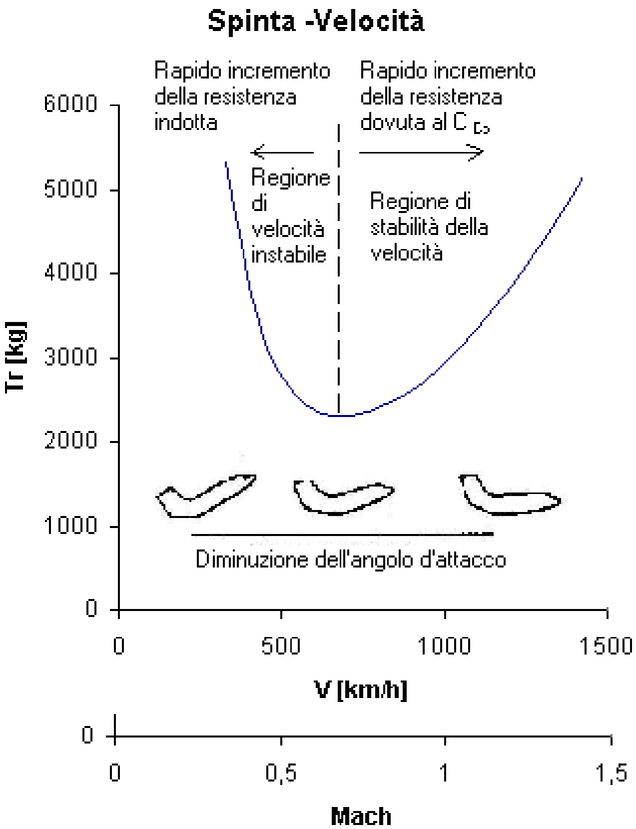
Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

RESISTENZA

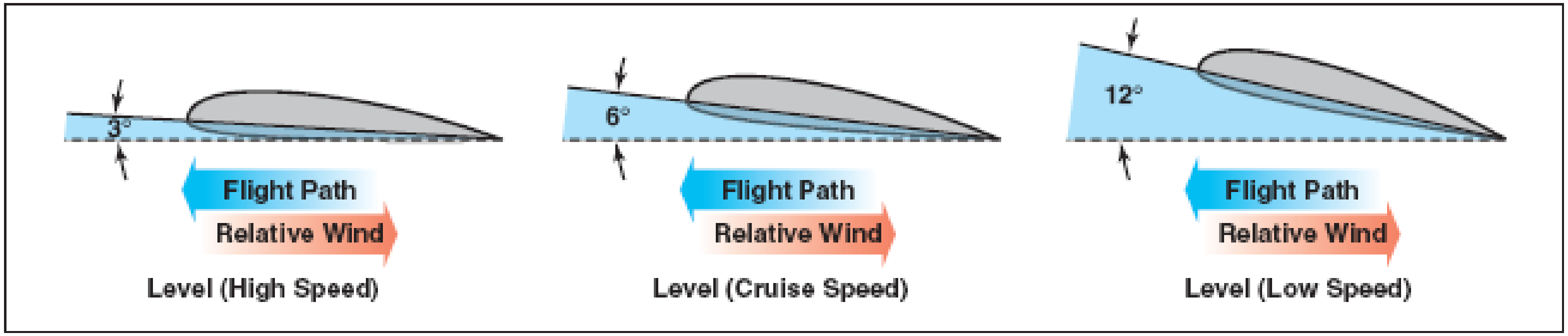
$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$$

$$C_D = C_{Do} + K C_L^2$$

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{1}{2}\rho \mathbf{V}^2 \mathbf{S} \mathbf{C}_{\mathbf{Do}} + \frac{1}{2}\rho \mathbf{V}^2 \mathbf{S} \mathbf{K} \mathbf{C}_{\mathbf{L}}^2}$$

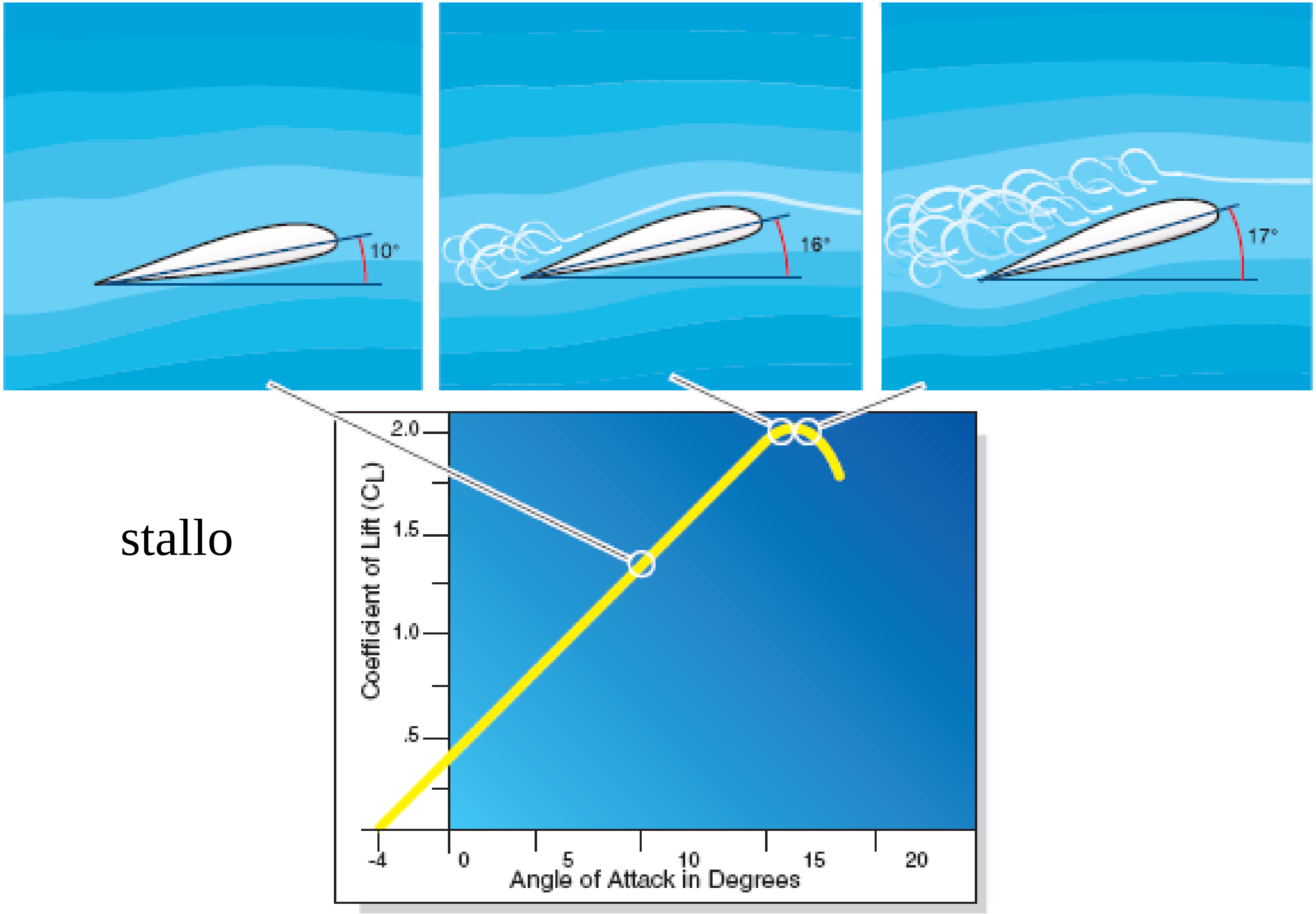


Legame tra V , CL ed α

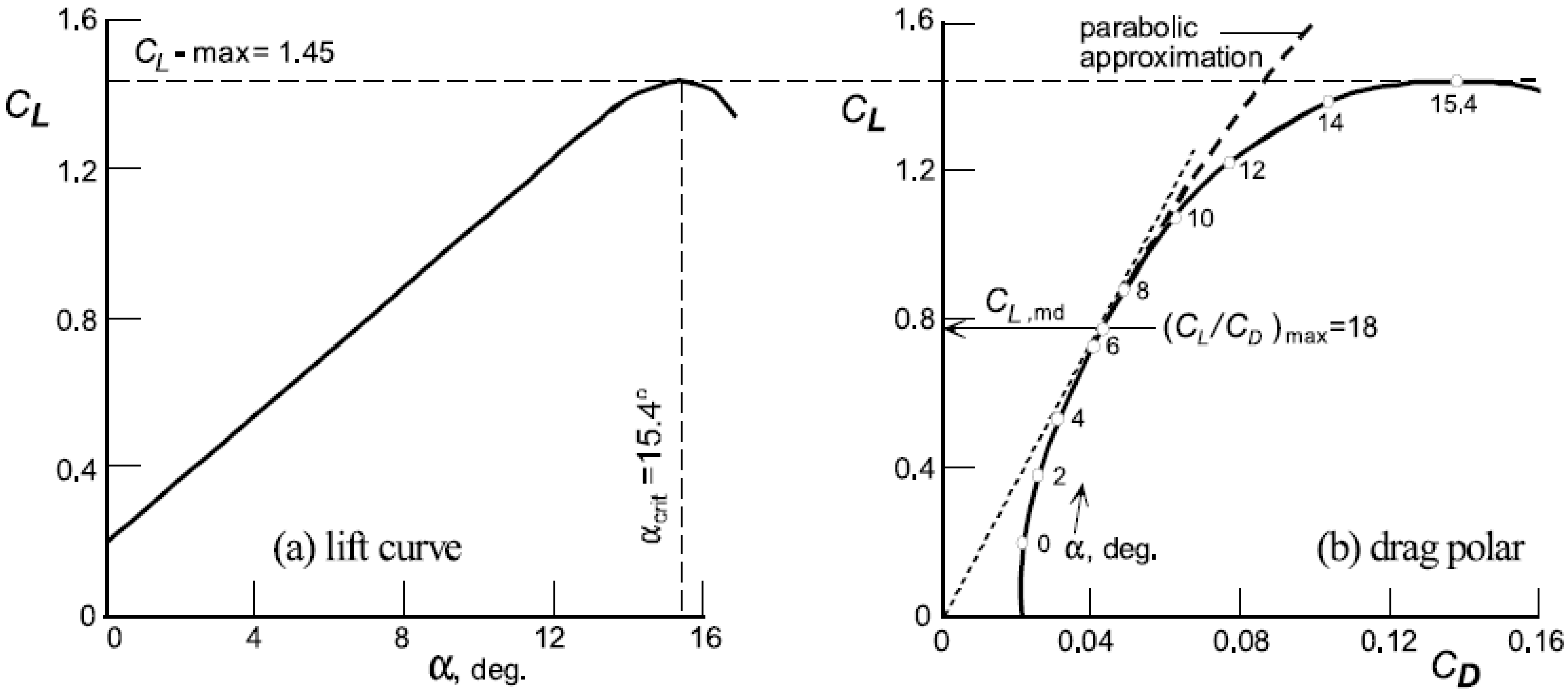


Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

stallo



Legame tra coeff. di portanza, angolo d'attacco e coeff. di resistenza (polare del velivolo)



Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

RESISTENZA

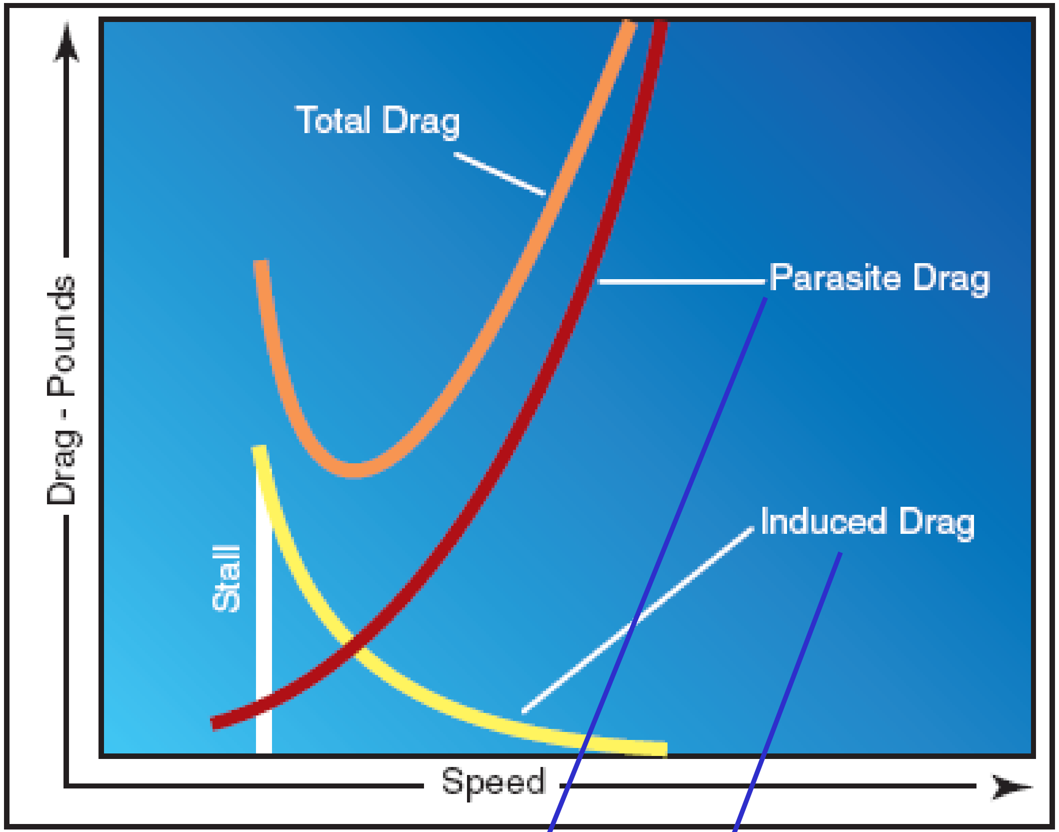
$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$$

$$C_D = C_{Do} + K C_L^2$$

$$\boxed{\mathbf{D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{Do} + \frac{1}{2}\rho V^2 S K C_L^2}}$$

Ed essendo $$CL = \frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{V^2}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{Do} + \frac{2KS}{\rho V^2}\left(\frac{W}{S}\right)^2$$



$$\boxed{D = T_{no} = aV^2 + b\frac{1}{V^2}}$$

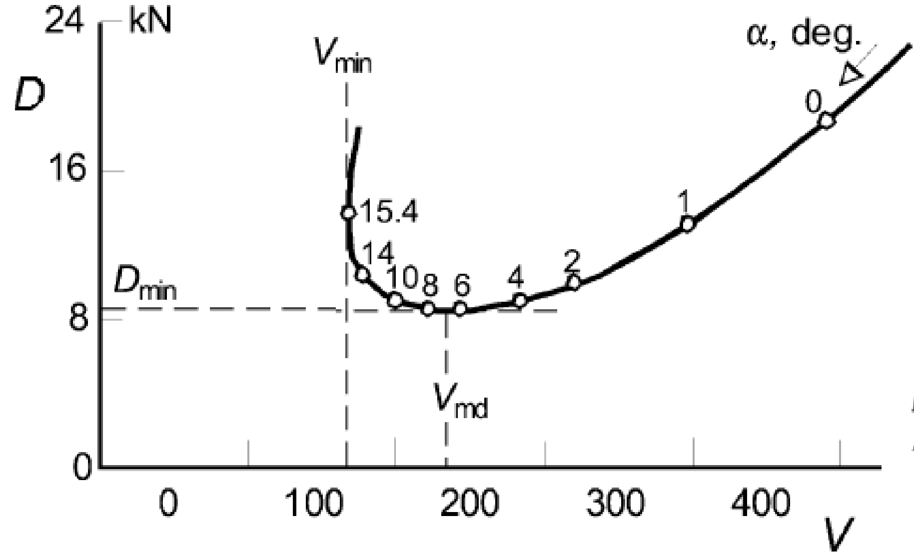
Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

RESISTENZA

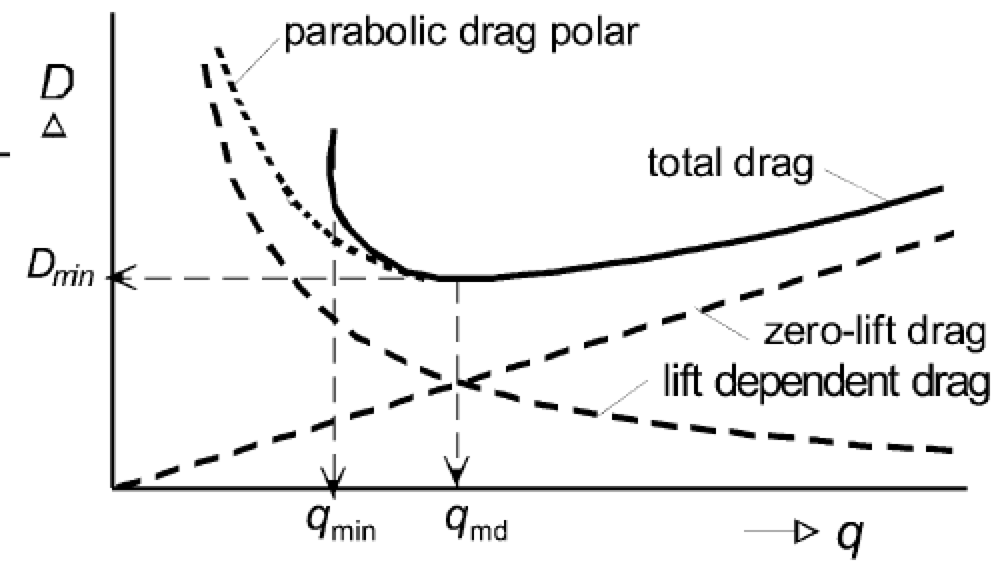
$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{Do} + \frac{2KS}{\rho V^2}\left(\frac{W}{S}\right)^2$$

In termini di pressione dinamica

$$D = q \cdot S C_{Do} + \frac{1}{q} \cdot KS\left(\frac{W}{S}\right)^2$$

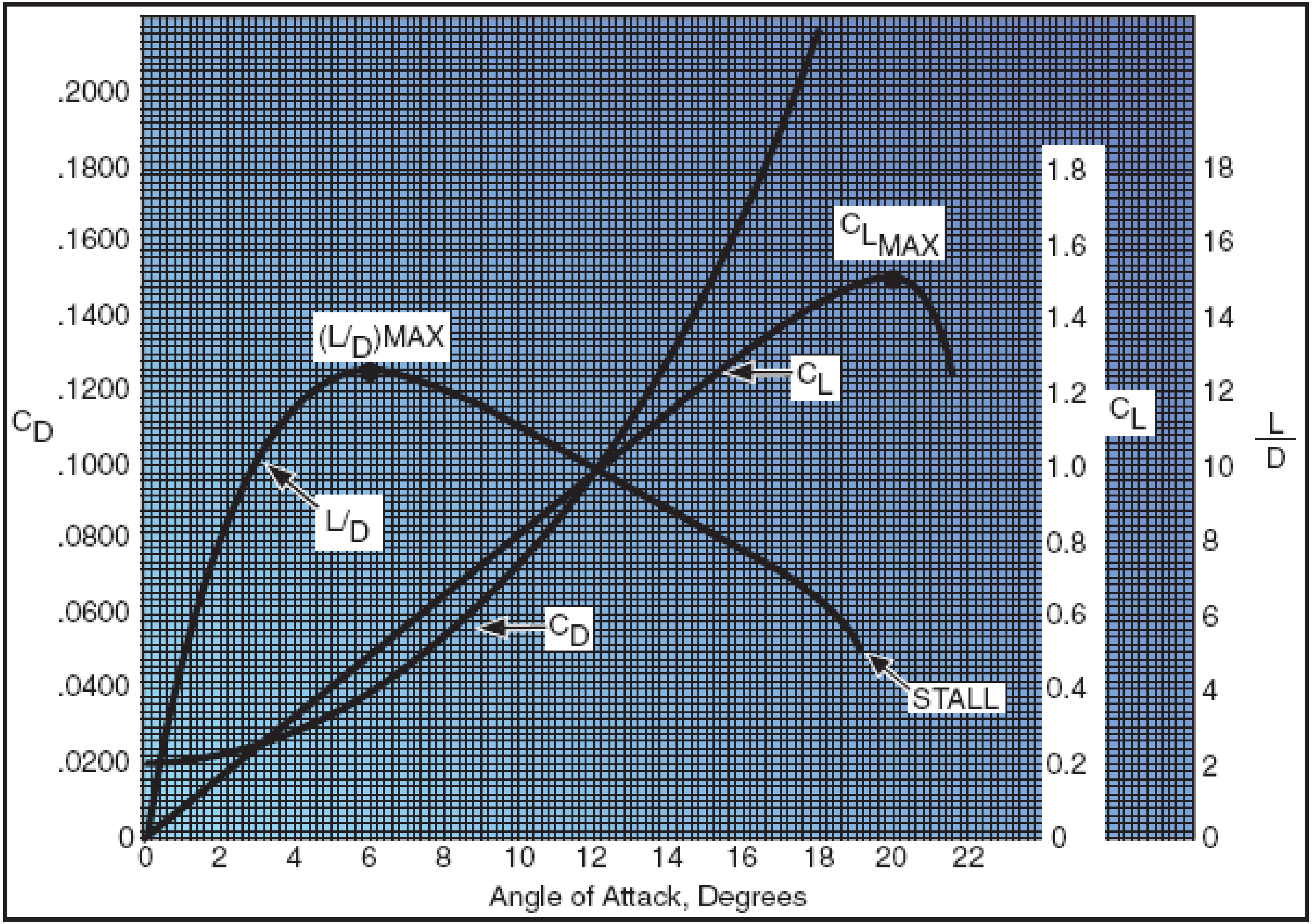


(a) Drag versus flight speed

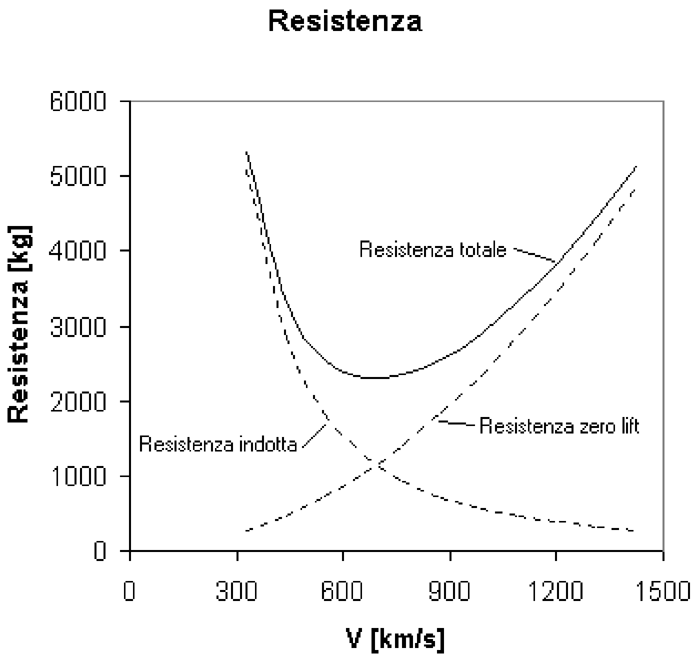


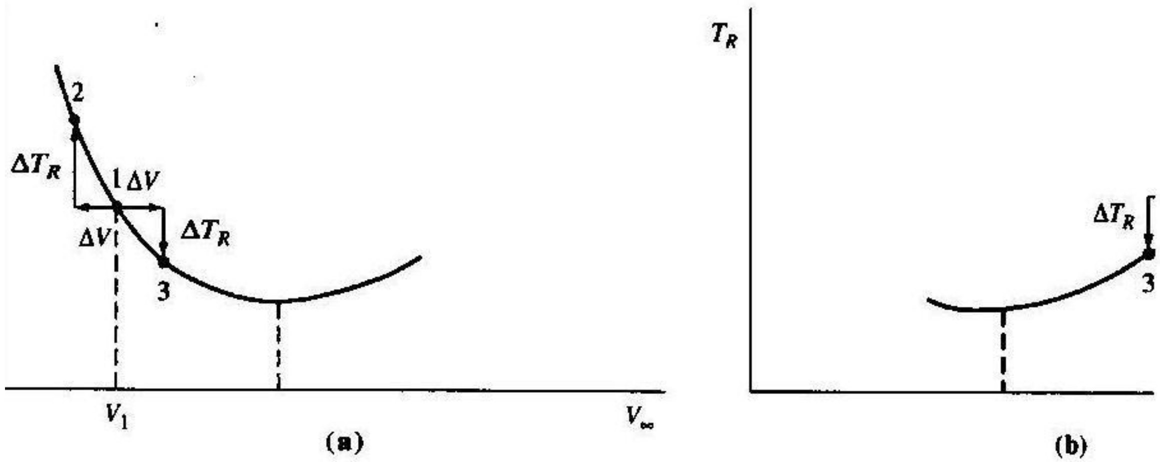
(b) Drag versus dynamic pressure

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

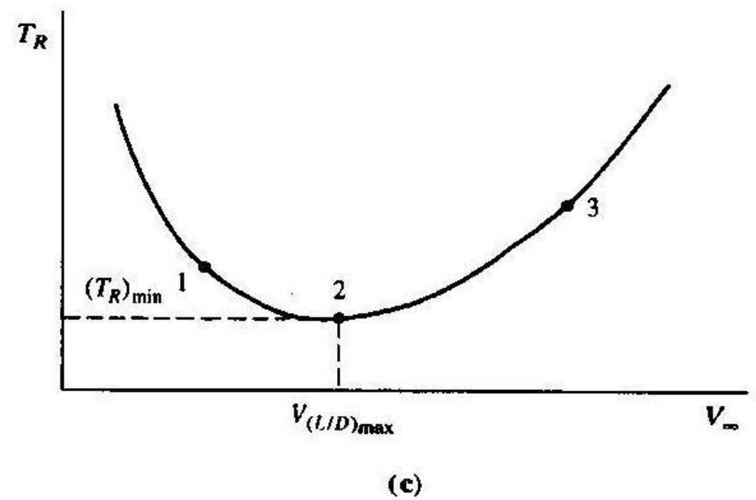


Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato





Il ramo sinistro è un ramo di equilibrio in volo livellato instabile !
Il ramo destro è invece stabile.

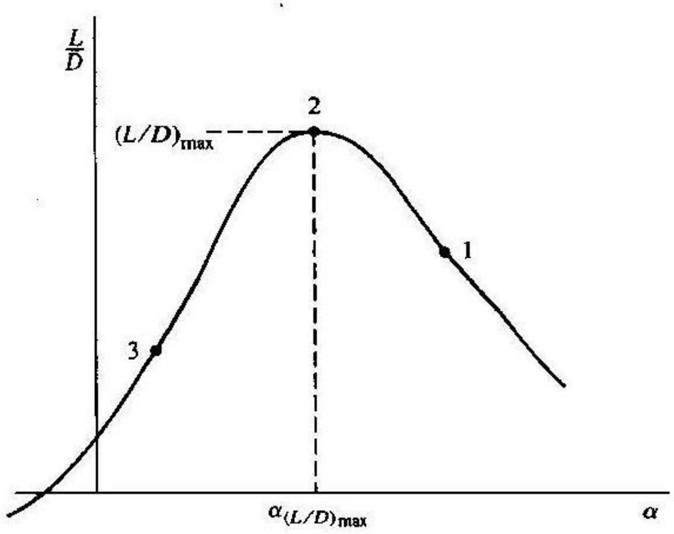


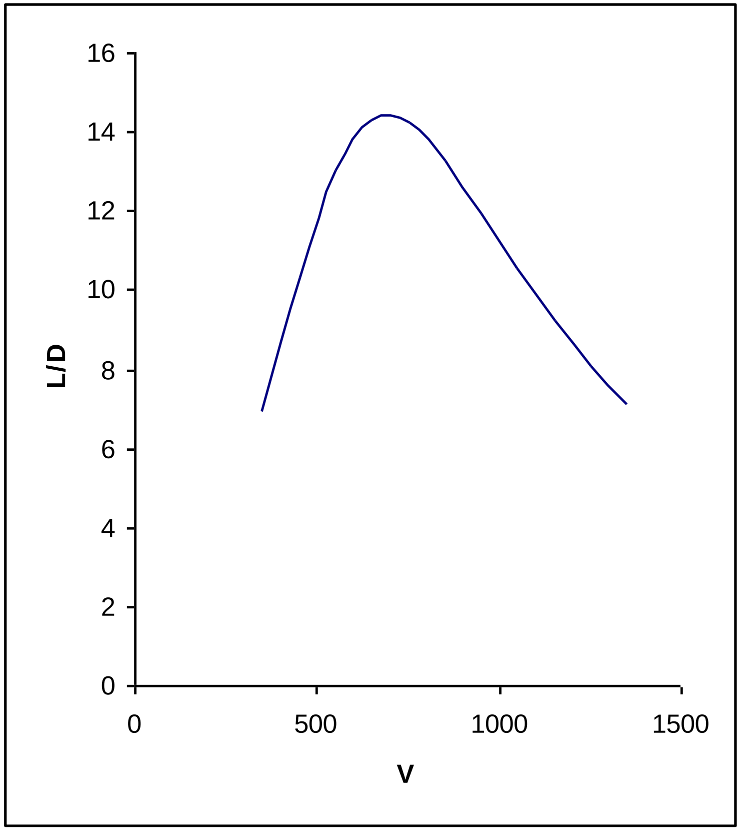
Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Efficienza aerodinamica

$$T_R = D = \frac{D}{W}W = \frac{D}{L}W \qquad T_R = \frac{W}{L/D}$$

$$\frac{L}{D} = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_D} = \frac{C_L}{C_D}$$





Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Approccio analitico

$$D = qSC_D = qS\left(C_{Do} + KC_L^2\right)$$

$$\mathrm{L} = \mathrm{W} = \mathrm{qSC_L} = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_L \longrightarrow \qquad C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[C_{Do} + 4K\left(\frac{W}{\rho V^2 S}\right)^2\right]$$

$$\boxed{D = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_{Do} + \frac{2KS}{\rho V^2}\left(\frac{W}{S}\right)^2}$$

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Approccio analitico

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{Do} + \frac{2KS}{\rho V^2}\left(\frac{W}{S}\right)^2$$

$$\boxed{D = T_{no} = \frac{1}{2}\rho f\, V^2 + \frac{2}{\rho}\frac{W^2}{S}\frac{1}{\pi A \, Re}\frac{1}{V^2}}$$

$$\boxed{D = T_{no} = aV^2 + b\frac{1}{V^2}}$$

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Approccio analitico

$$D = T_{no} = aV^2 + b\frac{1}{V^2}$$

Minima D se : d(D)dV=0

$$2aV - 2b\frac{1}{V^3} = 0 \longrightarrow aV^2 = b\frac{1}{V^2} \longrightarrow$$ Res. Parassita=Res. Indotta

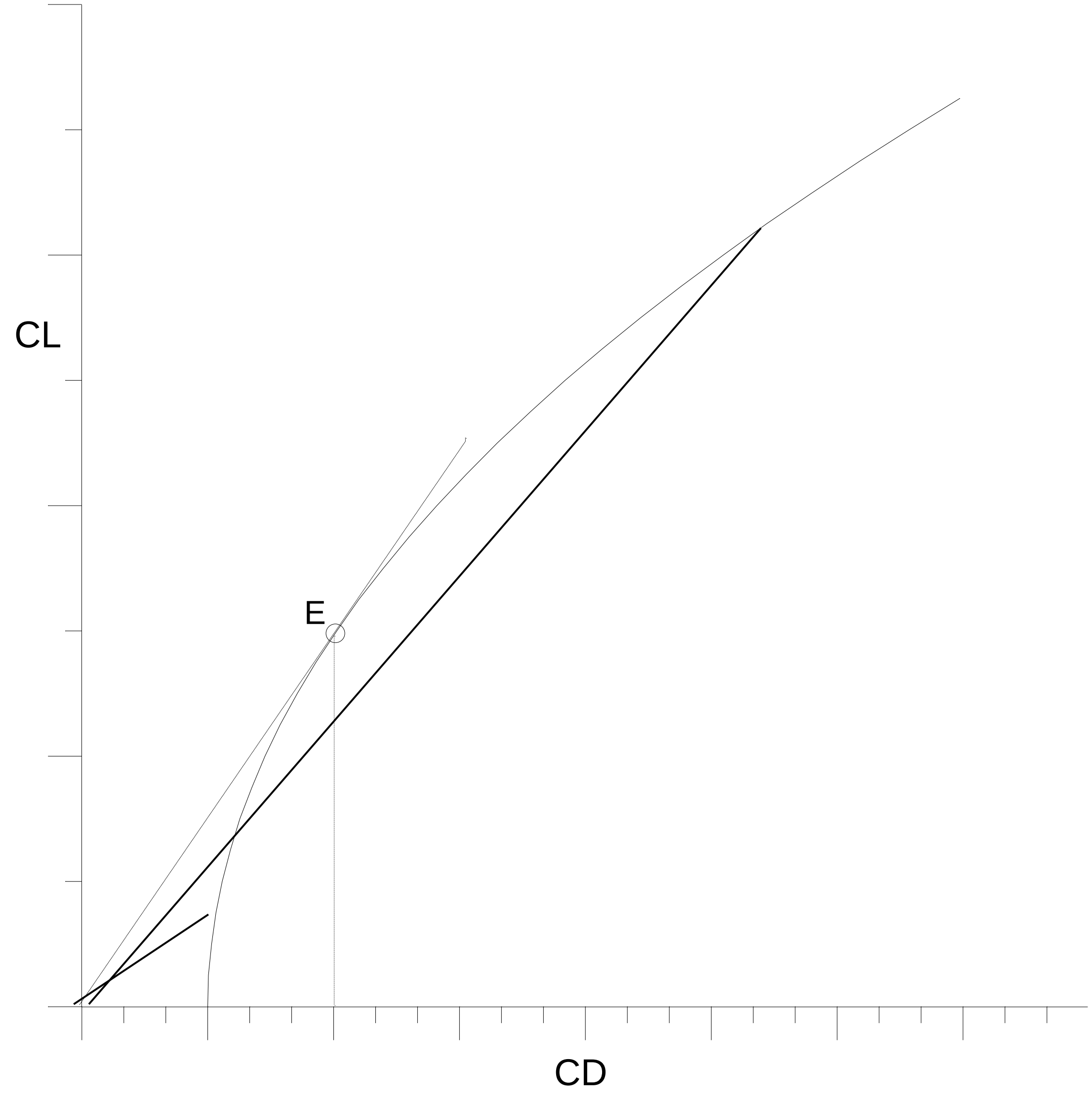
$$E_{max} = \frac{W}{D_{min}} \qquad C_{Do} = K \cdot C_L^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} CL_E &= \sqrt{\frac{CDo}{K}} = \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo} \\ CD_E &= CDo + KCL_E^{\,2} = 2\,CDo \\ E_{MAX} = E_E &= \frac{CL_E}{CD_E} = \frac{\sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo}}{2 \cdot CDo} = \sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{AR \cdot e}{CDo}} \end{aligned}}$$

$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{CL_E}}$$

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Approccio analitico

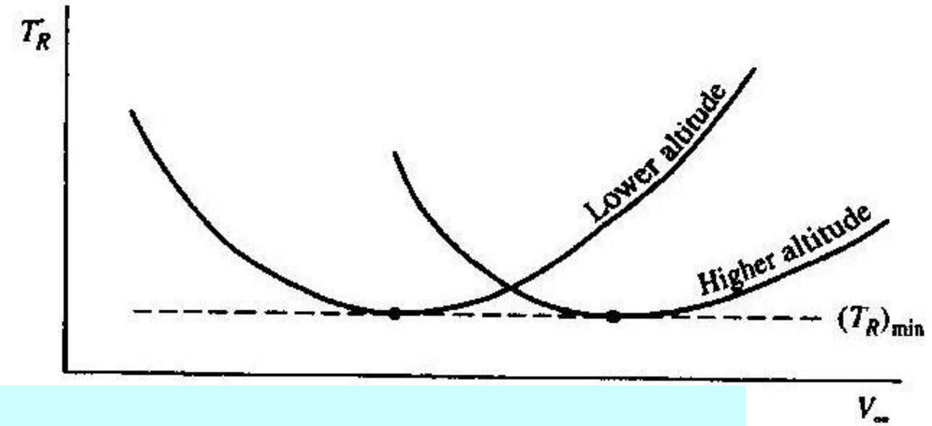


Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

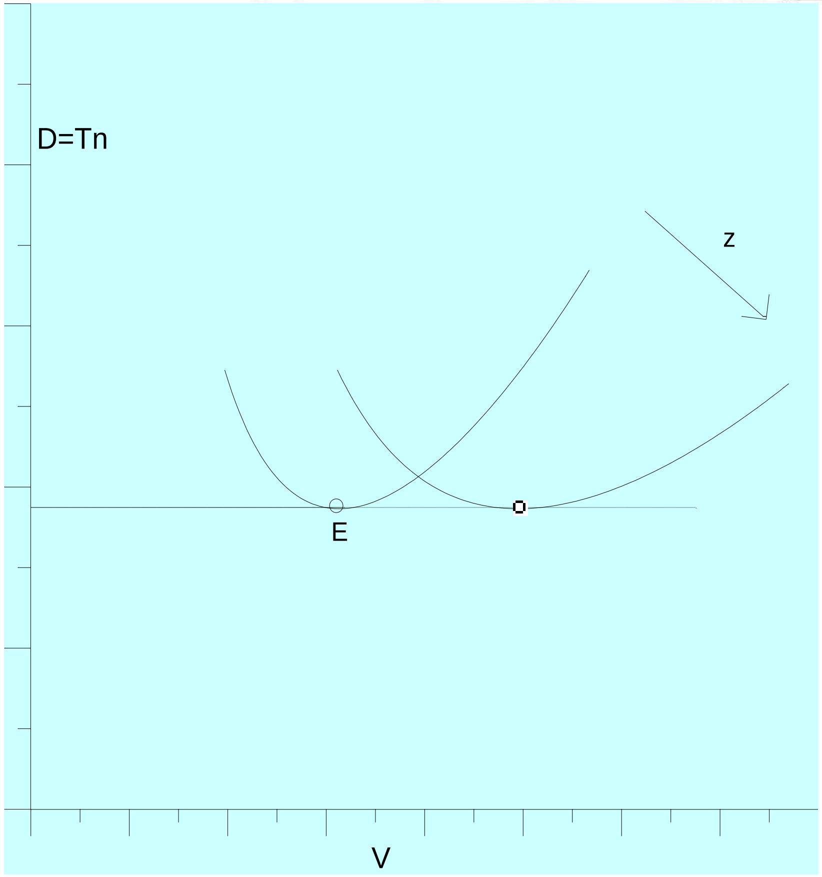
Approccio analitico

$$D_{min} = T_{no\_min} = \frac{W}{E_{MAX}}$$

$$V(z) = \frac{V_o}{\sqrt{\sigma}}$$



Influenza della quota

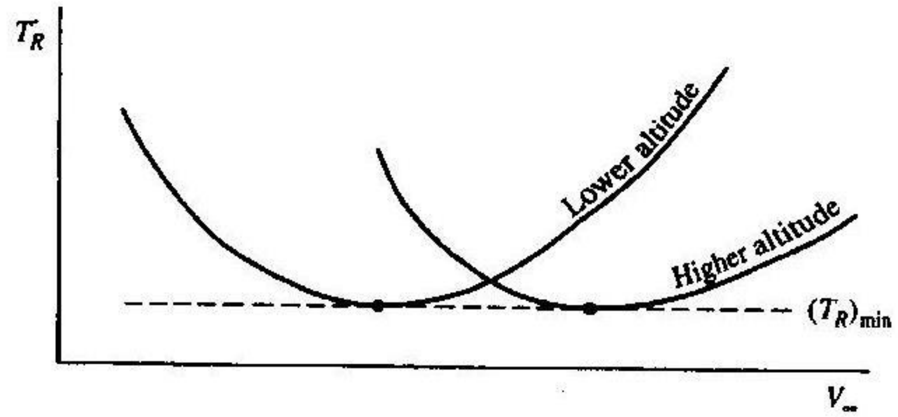


Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Approccio analitico

$$D_{min} = T_{no\_min} = \frac{W}{E_{MAX}}$$

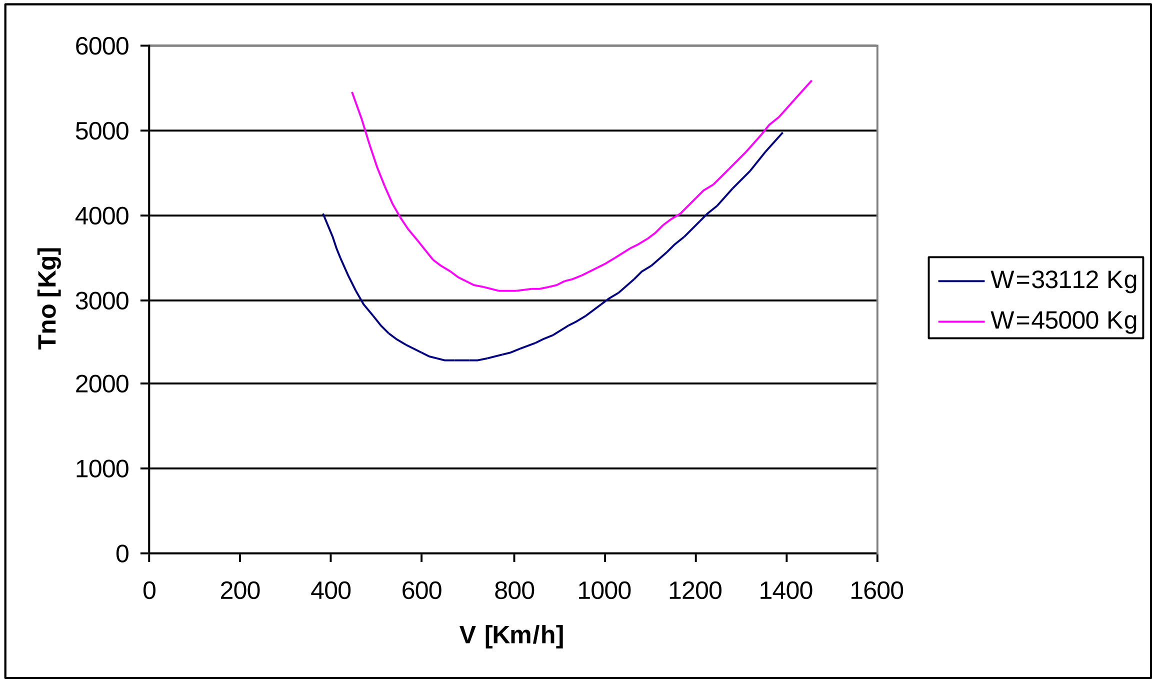
$$V(z) = \frac{V_o}{\sqrt{\sigma}} \qquad V = \sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{CL}}$$



La resistenza (a parità di assetto) (ad esempio punto E, resistenza minima) aumenta come il peso. (As esempio, se il peso aumenta di una volta e mezzo, anche la resistenza aumenta della stessa percentuale.

La velocità di volo (per dato assetto) (vedi formula sopra) aumenta con la radice del peso. (si vede che la curva si sposta anche leggermente a destra).

Influenza del peso



Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

$$\Pi_{no} = T_{no} \cdot V = D \cdot V$$

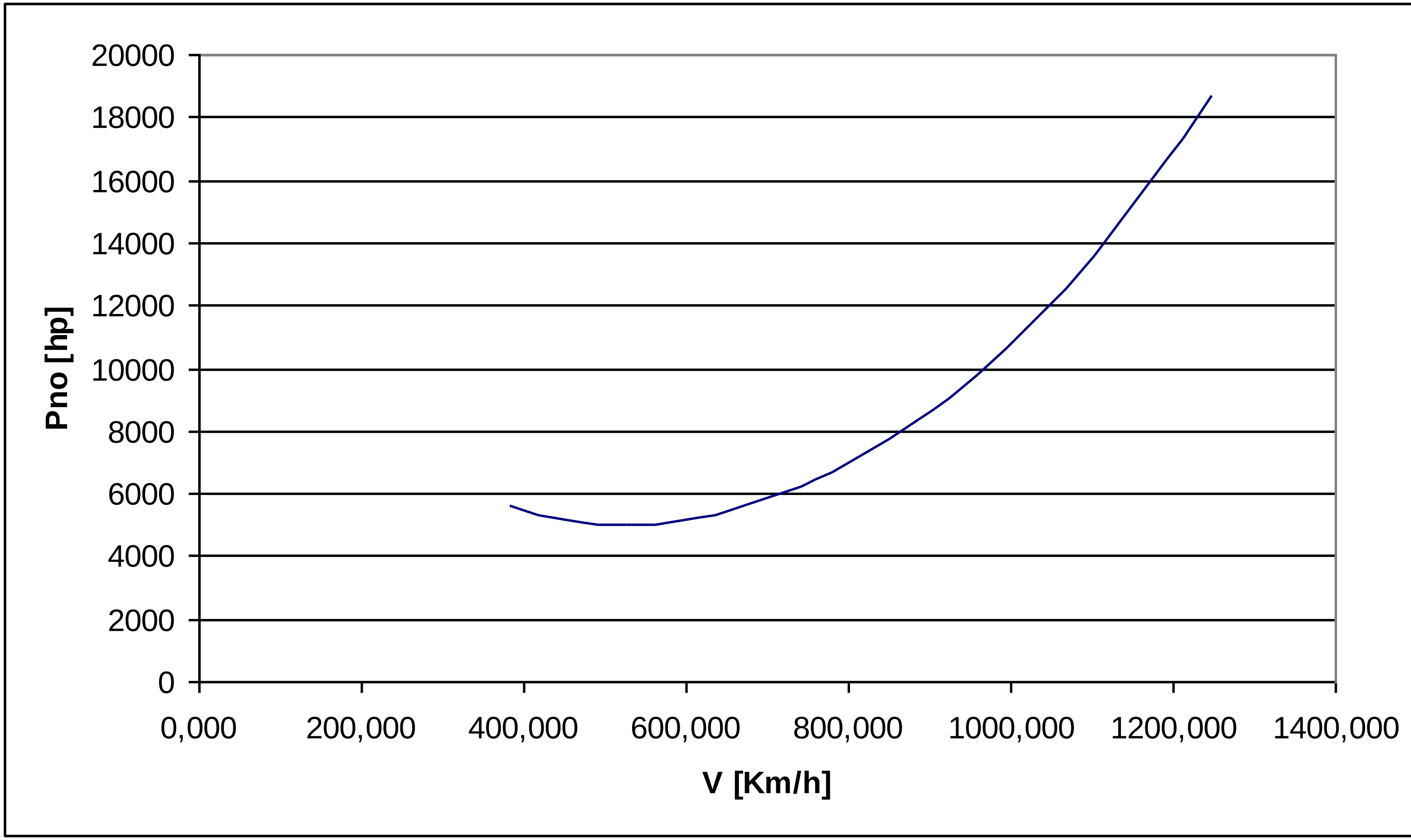
Consideriamo consideriamo sempre il velivolo con peso pari a W=33112.8 Kg , S=88.2 m2 , b=22.9 m e quota pari a 9000 m. Il CDo=0.015 e il fattore di Oswald sia 0.80.

Il calcolo inizia da un valore di V pari alla velocità di stallo a quota z=9000 m, considerando che il CLMAX del velivolo in configurazione pulita è 1.40.

V [Km/h]	CL	CD	E	D=W/E [Kg]	Pno [KW]	Pno [hp]
382,386	1,400	0,170	8,24	4019	4188	5614
418,386	1,169	0,123	9,50	3486	3974	5327
454,386	0,991	0,093	10,69	3096	3834	5139
490,386	0,851	0,072	11,78	2812	3757	5037
526,386	0,739	0,058	12,71	2606	3738	5011
562,386	0,647	0,048	13,45	2462	3772	5057
598,386	0,572	0,041	14,00	2365	3857	5170
634,386	0,509	0,035	14,35	2308	3990	5348
670,386	0,455	0,031	14,51	2283	4170	5590
706,386	0,410	0,028	14,49	2285	4398	5895
742,386	0,371	0,026	14,34	2310	4672	6263
778,386	0,338	0,024	14,06	2355	4994	6695
814,386	0,309	0,023	13,70	2417	5364	7191
850,386	0,283	0,021	13,27	2496	5783	7752
886,386	0,261	0,020	12,79	2588	6252	8381

Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

$$\Pi_{no} = T_{no} \cdot V = D \cdot V$$



Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

$$\Pi_{no} = T_{no} \cdot V = D \cdot V$$

$$\Pi_{no} = D \cdot V = \frac{1}{2}\rho \cdot V^2 \cdot S \cdot (CDo + KCL^2) \cdot V$$

$$\Pi_{no} = \frac{1}{2}\rho \cdot CDo \cdot S \cdot V^3 \; + \; \frac{1}{2}\rho \cdot S \cdot V^3 \cdot KCL^2$$

$$CL = \frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{V^2}$$

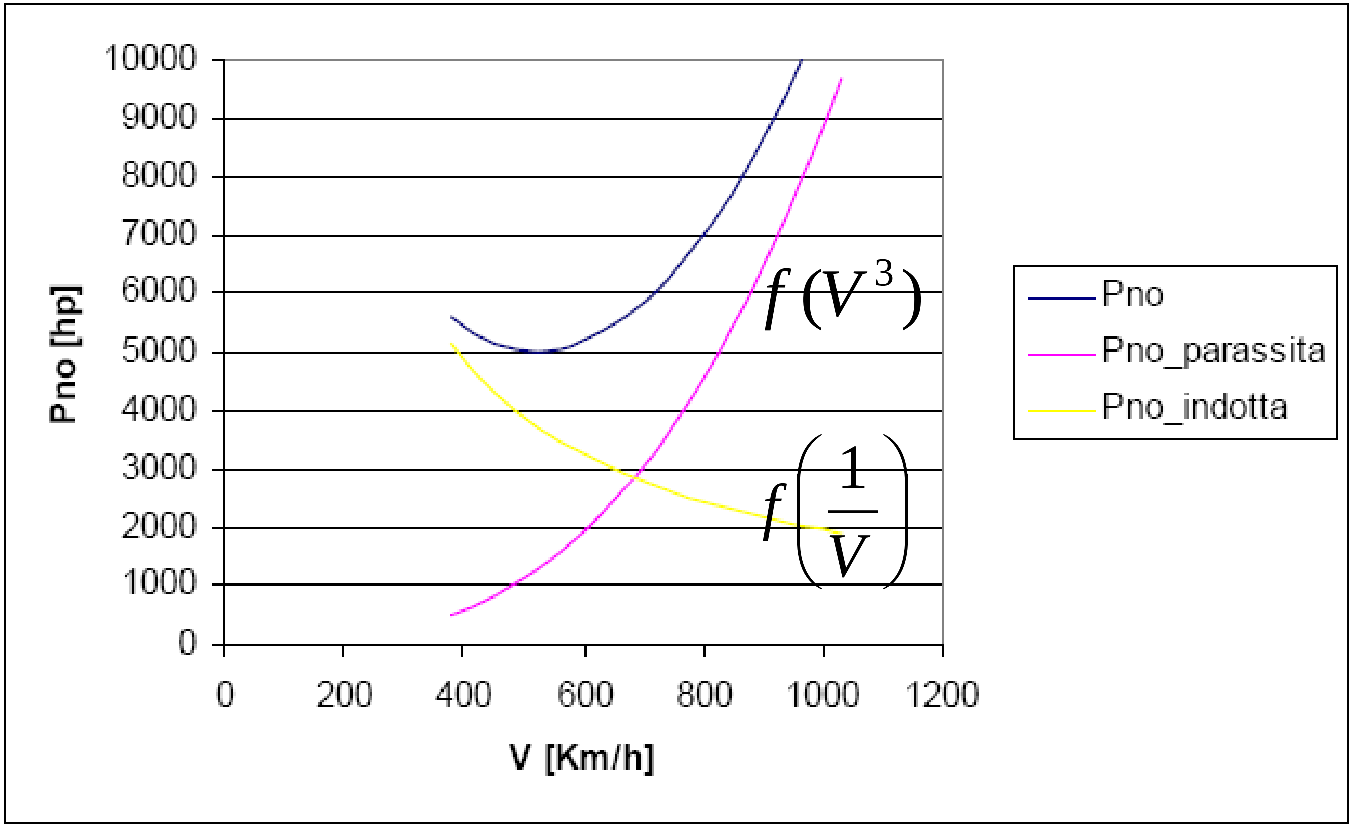
$$\boxed{\Pi_{no} = \frac{1}{2}\rho \cdot CDo \cdot S \cdot V^3 + \frac{2}{\rho} \cdot S \cdot K \cdot \left(\frac{W}{S}\right)^2 \cdot \frac{1}{V}}$$

$$\boxed{\Pi_{no} = D \cdot V = (a \cdot V^2 + \frac{b}{V^2}) \cdot V = a \cdot V^3 + \frac{b}{V}}$$

Polari tecniche – **POTENZA RICHIESTA al volo livellato**

$$\Pi_{no} = T_{no} \cdot V = D \cdot V$$

$$\boxed{\Pi_{no} = D \cdot V = (a \cdot V^2 + \frac{b}{V^2}) \cdot V = a \cdot V^3 + \frac{b}{V}}$$



Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

Deriviamo per trovare il minimo

$$\Pi_{no} = D \cdot V = (a \cdot V^2 + \frac{b}{V^2}) \cdot V = a \cdot V^3 + \frac{b}{V}$$

$$\frac{d\Pi_{no}}{dV} = 3 \cdot a \cdot V^2 - \frac{b}{V^2} = 0 \longrightarrow 3 \cdot a \cdot V^2 = \frac{b}{V^2} \longrightarrow 3 \cdot Do = Di$$

$$\boxed{CDi = K \cdot CL^2 = \frac{CL^2}{\pi \cdot AR \cdot e} = 3 \cdot CDo}$$

CD=4 CDo

$$CL_P = \sqrt{\frac{3 \cdot CDo}{K}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo}$$

$$CL_P = \sqrt{3} \cdot CL_E = 1.73 \cdot CL_E$$

$$CD_P = 4 \cdot CDo$$

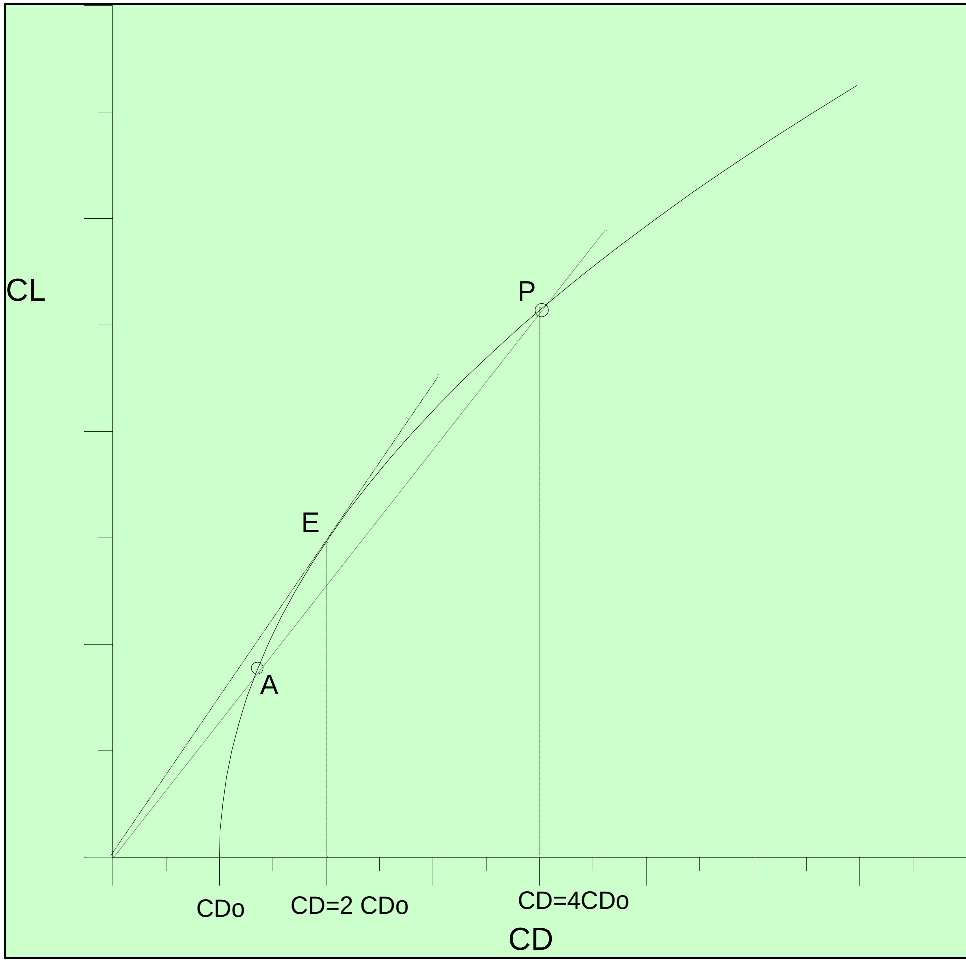
Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

PUNTO P

$$CL_P = \sqrt{3} \cdot CL_E = 1.73 \cdot CL_E$$

$$CD_P = 4 \cdot CDo$$

$$E_P = \frac{CL_P}{CD_P} = \frac{\sqrt{3} \cdot CL_E}{4 \cdot CDo} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{CL_E}{CD_E}$$

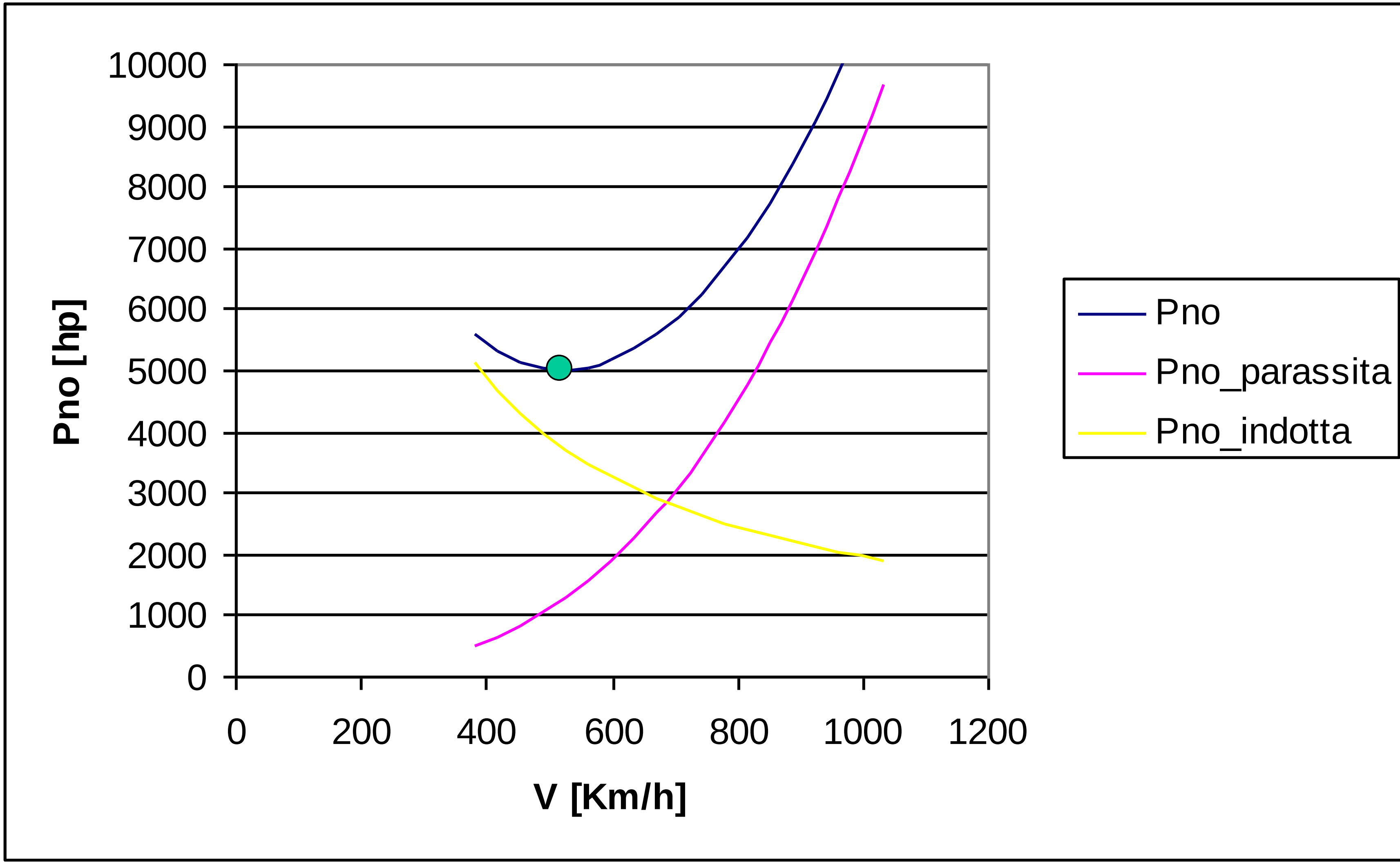


$$V_P = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{CL_P}} = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3} \cdot CL_E}} = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1.32}$$

Quindi la velocità nel punto caratteristico P è uguale a quella in E diviso per 1.32.

Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

PUNTO P



Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

PUNTO P

$$D = T_{no} = \frac{W}{E} \qquad \Pi_{no} = T_{no} \cdot V = \frac{W}{E} V = \frac{W}{(E/V)}$$

$$\Pi_{no\_MIN} \Rightarrow \left(\frac{E}{V}\right)_{MAX} \qquad \Pi_{no} = \frac{W}{E} V = W \cdot \frac{CD}{CL} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \cdot \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

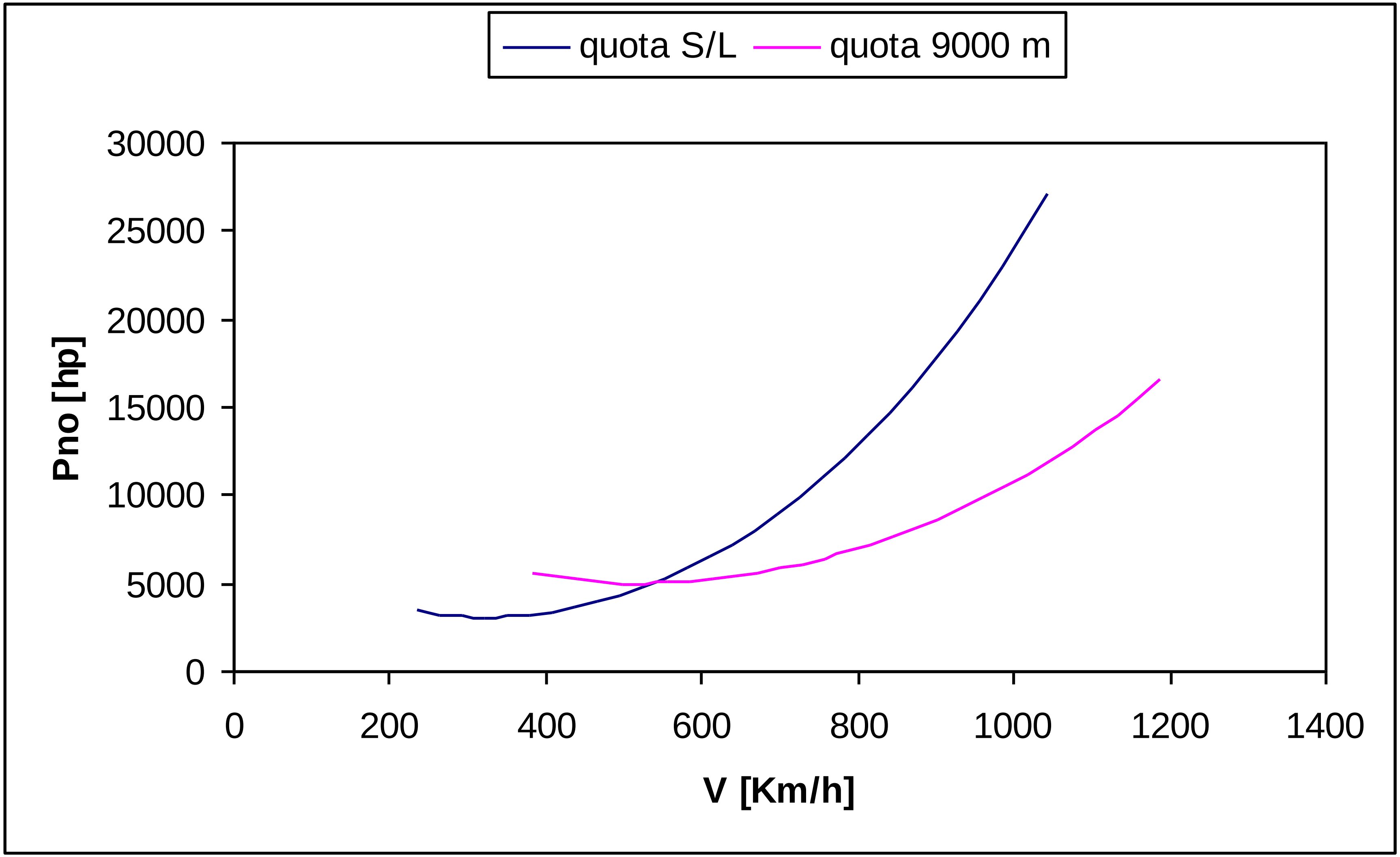
$$\Pi_{no} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o \sigma}} \cdot \sqrt{\frac{1}{S}} \cdot W^{3/2} \cdot \frac{CD}{CL^{3/2}}$$

$$\boxed{\Pi_{no\_MIN} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot W^{3/2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{CL^{3/2}}{CD}\right)_{MAX}}}$$

$$\Pi_{no\_MIN} \Rightarrow \left(\frac{CL^{3/2}}{CD}\right)_{MAX} = \left(E \cdot \sqrt{CL}\right)_{MAX}$$

Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

PUNTO P – considerazioni grafiche



Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

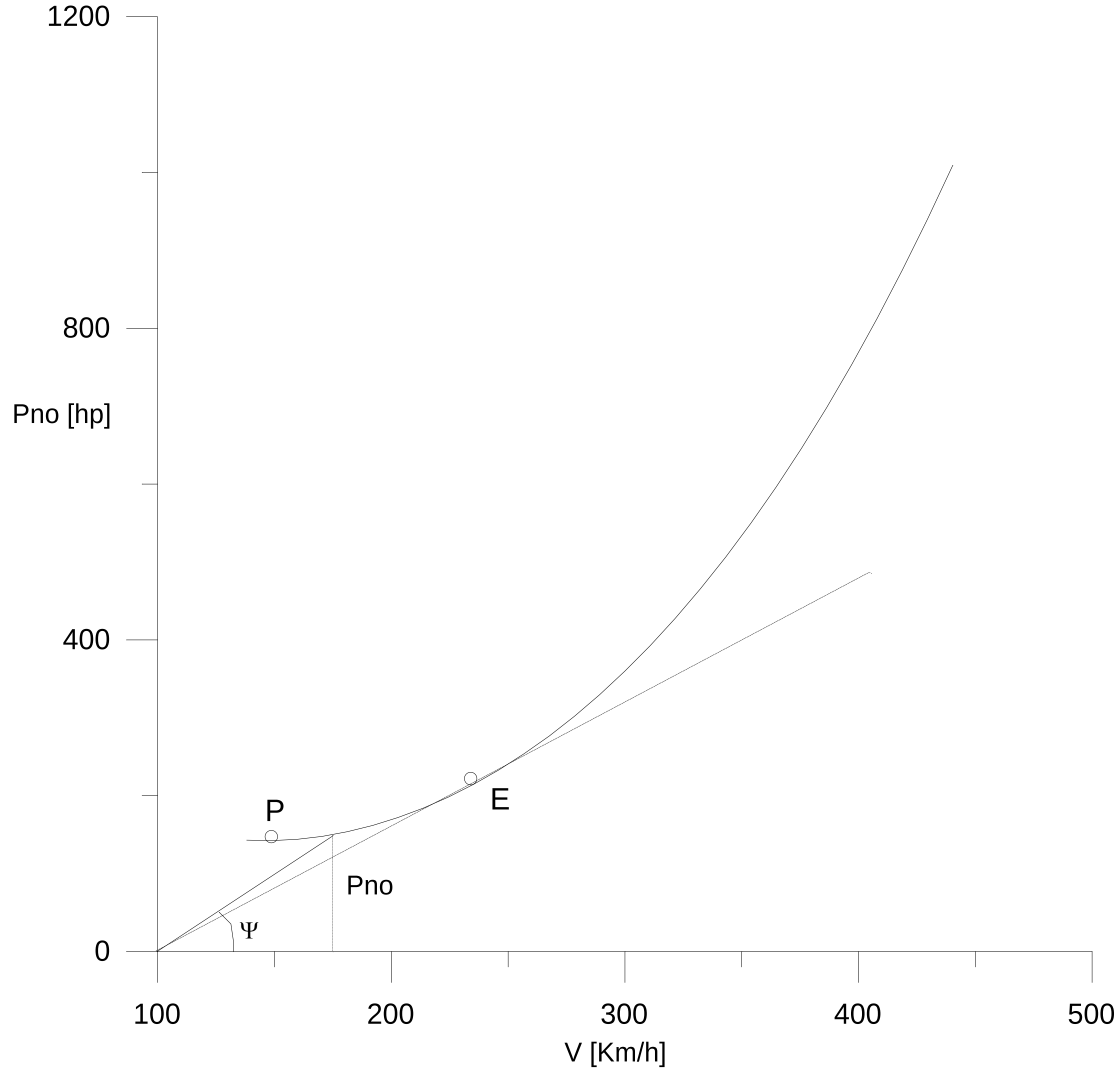
PUNTO P – considerazioni grafiche

$$\Pi_{no} = V \cdot \tan\psi$$

$$\tan\psi = T_{no} = D$$

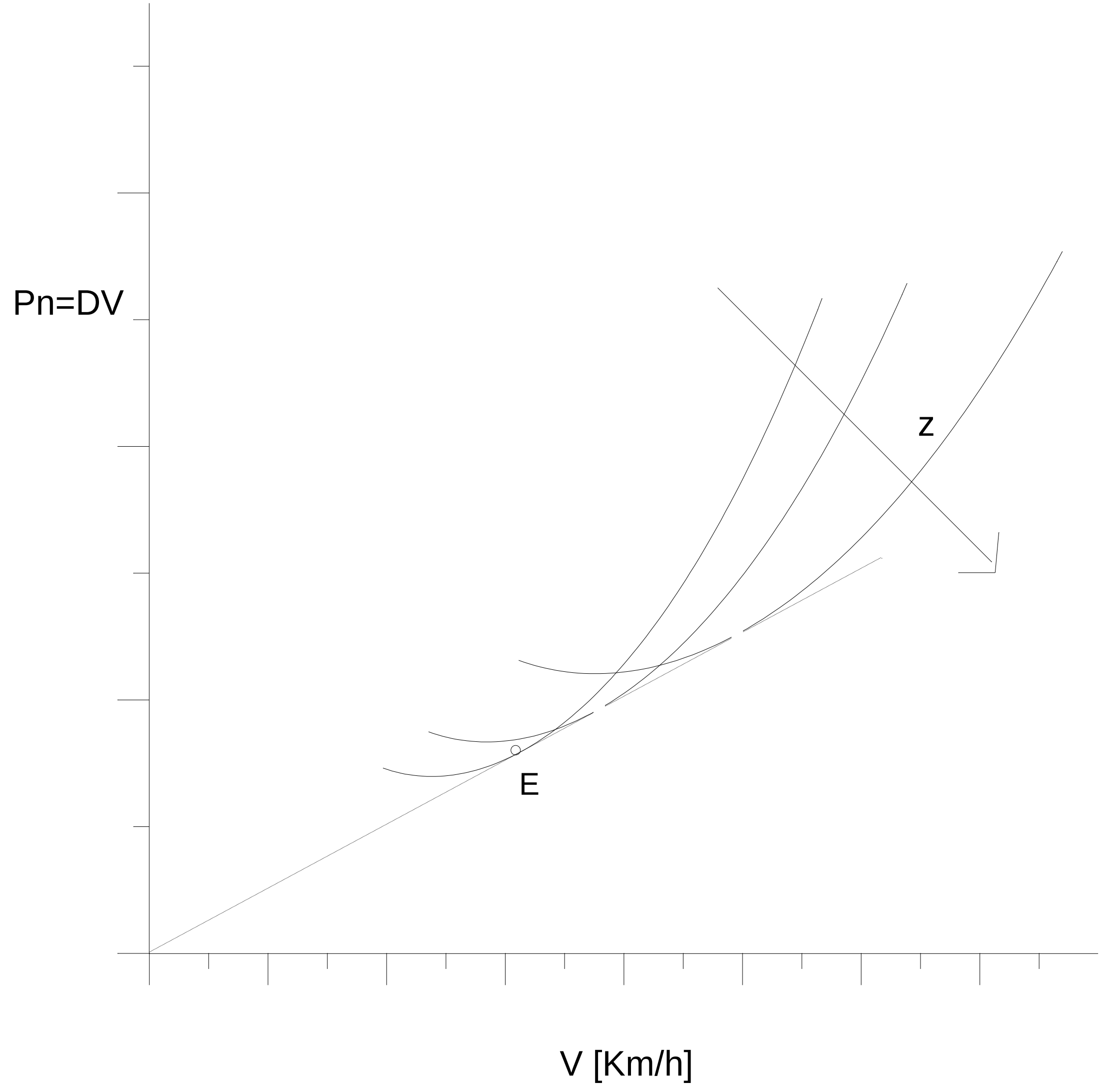
$$\psi_{MIN} = ATAN(D_{MIN}) = ATAN\left(\frac{W}{E_{MAX}}\right)$$

$$V_P = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1.32}$$



Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

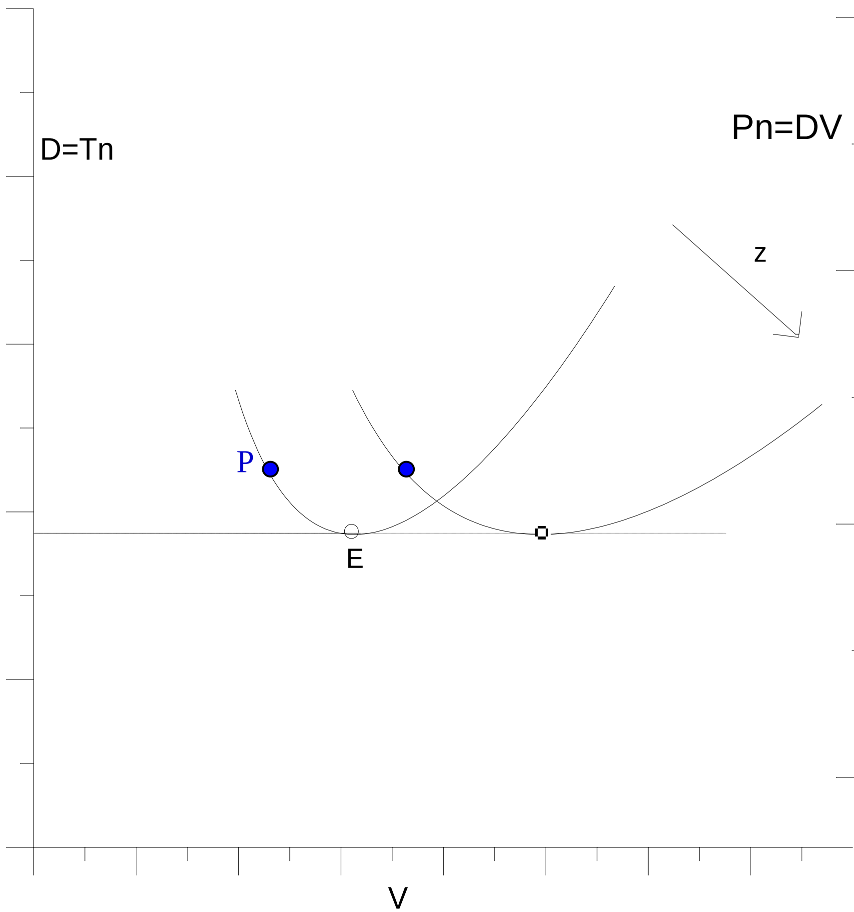
PUNTO P – considerazioni grafiche

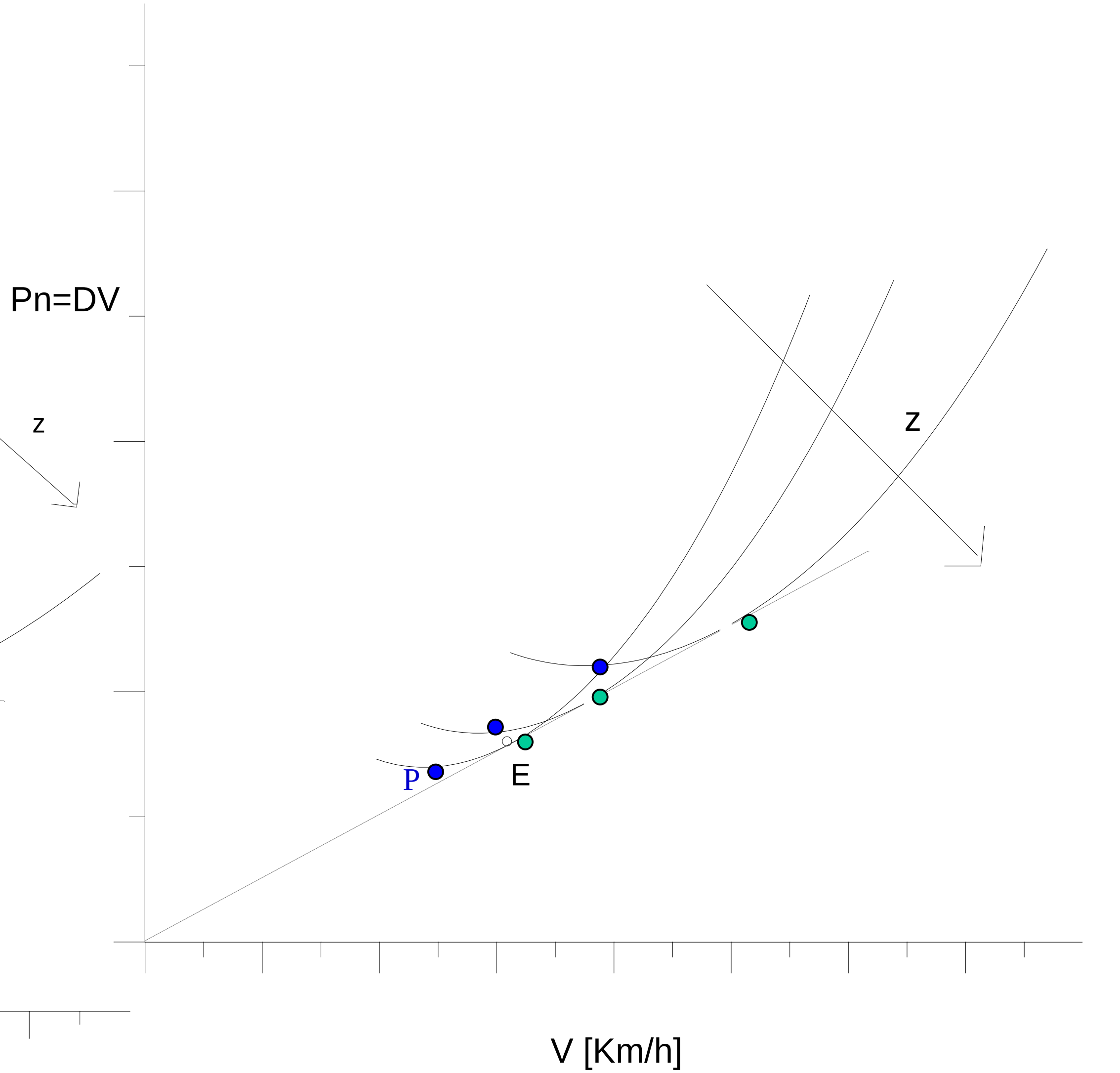


Polari tecniche

PUNTO E : Max Efficienza - Minima resistenza volo livellato $(E)_{MAX}$

PUNTO P : Min. Potenza volo livellato $\left(\Pi_{no}\right)_{MIN} = (D \cdot V)_{MIN}$ $\left(\frac{E}{V}\right)_{MAX} \Rightarrow \left(E \cdot \sqrt{CL}\right)_{MAX}$





Polari tecniche – Influenze Peso e CDo su Potenza necessaria

$$\Pi_{no} = \frac{1}{2}\rho \cdot CDo \cdot S \cdot V^3 + \frac{2}{\rho} \cdot S \cdot K \cdot \left(\frac{W}{S}\right)^2 \cdot \frac{1}{V}$$

con

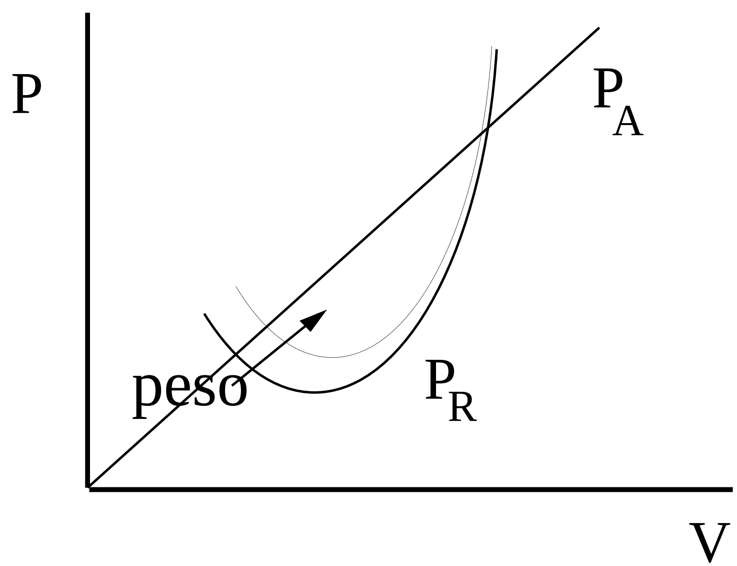
$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{CL}}$$

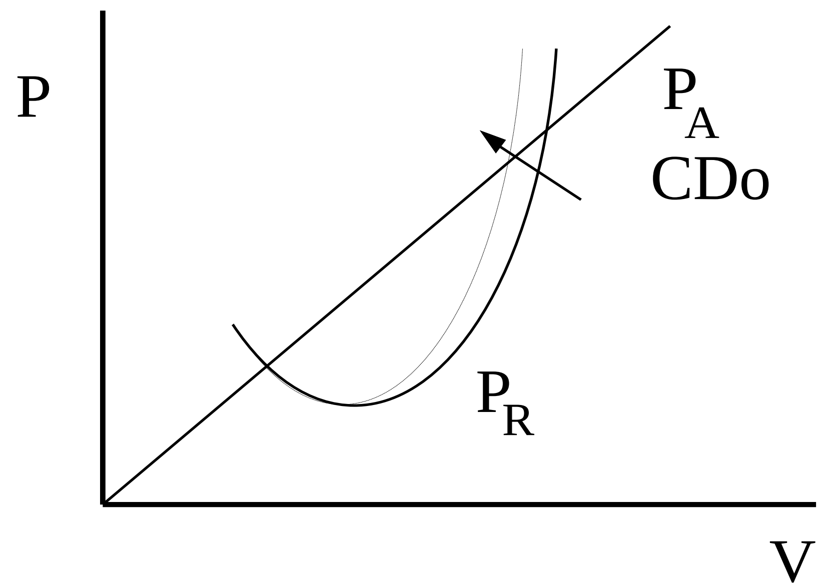
$$\Pi_{no} = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot CD_0 \cdot \frac{1}{CL^{3/2}} \cdot W^{3/2} + \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot \frac{1}{\pi AR \cdot e}\sqrt{CL} \cdot W^{3/2}$$

$$\Pi_{no} = \left[\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}}\right] \cdot \left[\frac{CD_0}{CL^{3/2}} + \frac{\sqrt{CL}}{\pi AR \cdot e}\right] \cdot W^{3/2}$$

A parità di assetto (condizione di volo o CL) la potenza necessaria varia con W ^ 3/2

La velocità (vedi sopra) aumenta con la radice del peso W

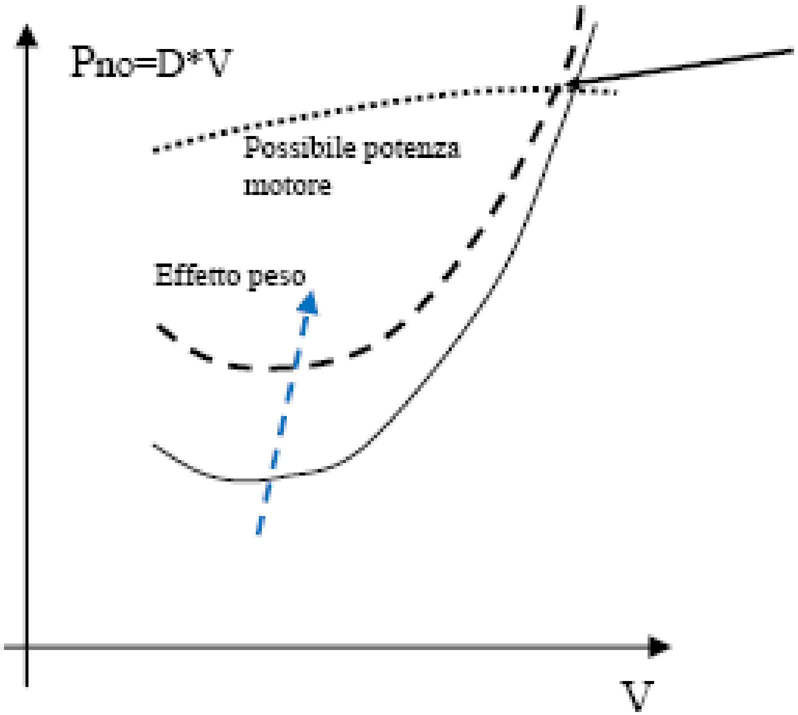




Polari tecniche – Influenze Peso su Potenza necessaria

$$\Pi_{no} = \left[\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \right] \cdot \left[\frac{CD_0}{CL^{3/2}} + \frac{\sqrt{CL}}{\pi AR \cdot e} \right] \cdot W^{3/2}$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{CL}}$$



Per data potenza motore l'aumento di peso non compromette in modo forte le velocità di volo ottenibili. La variazione forte si ha alle basse velocità (si riduce fortemente il rateo di salita , cap. 8)

Tutte le velocità dei punti caratteristici si spostano a destra proporzionalmente alla radice del peso W.

La potenza minima aumenta proporzionalmente a $W^{(3/2)}$

Polari tecniche – Influenze CDo su Potenza necessaria

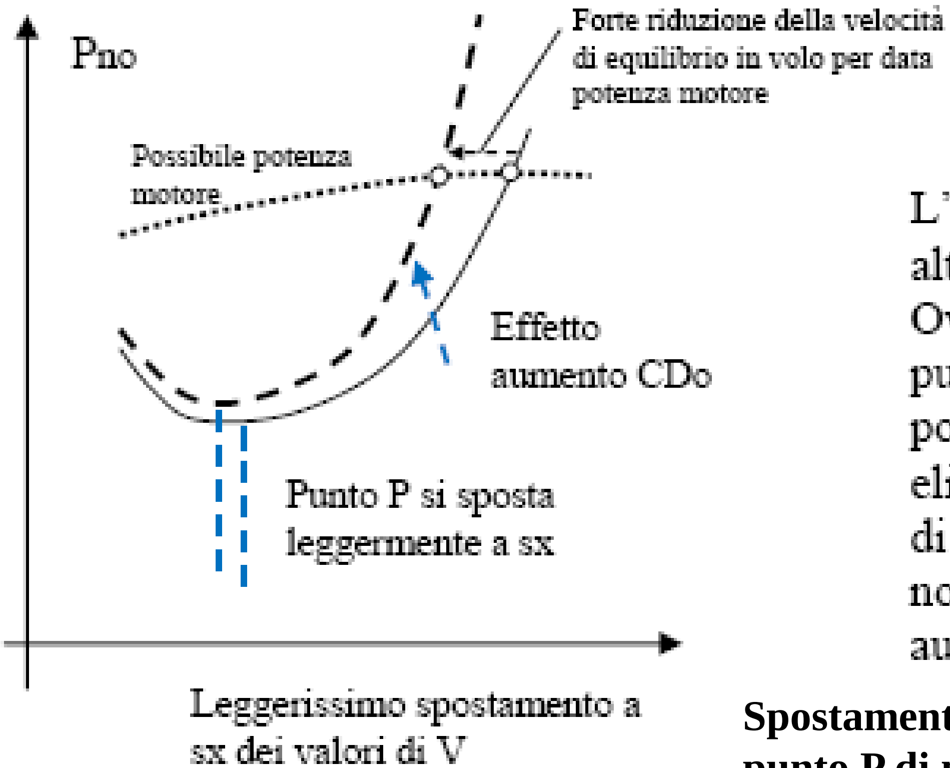
$$\Pi_{no} = \left[\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}}\right] \cdot \left[\frac{CD_0}{CL^{3/2}} + \frac{\sqrt{CL}}{\pi AR \cdot e}\right] \cdot W^{3/2}$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{CL}}$$

$$\Pi_{no} = \frac{1}{2}\rho \cdot CDo \cdot S \cdot V^3 + \frac{2}{\rho} \cdot S \cdot K \cdot \left(\frac{W}{S}\right)^2 \cdot \frac{1}{V}$$

$$CL_P = \sqrt{\frac{3 \cdot CDo}{K}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo}$$

$$V_P = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W}{S}}\sqrt{\frac{1}{CL_P}}$$

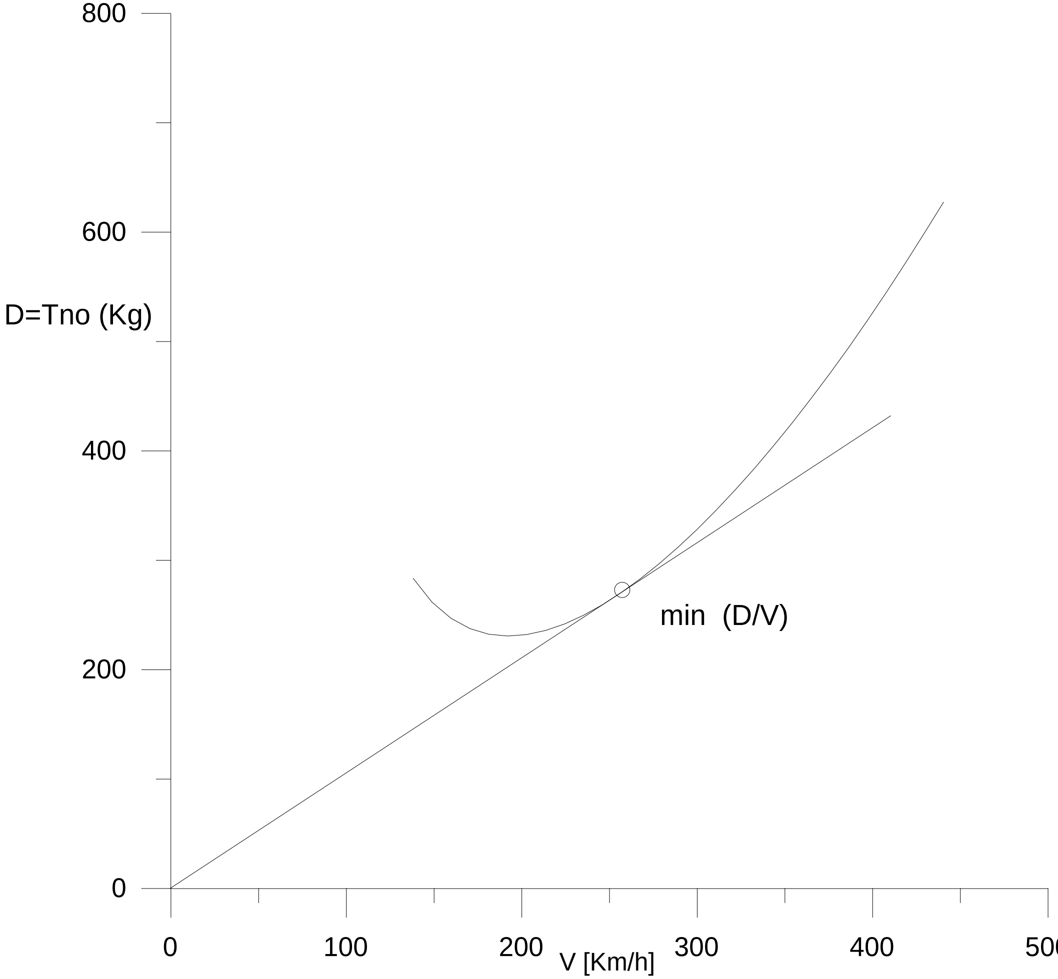


L'aumento del CDo si fa sentire soprattutto alle alte velocità sulla potenza necessaria al volo. Ovviamente non fa variare molto le velocità dei punti caratteristici (come prima) Per data potenza disponibile (ad esempio un velivolo ad elica) si vede come è drammatica la riduzione di velocità derivante da un aumento di CD_0, ma non molto sensibile la riduzione dovuta ad aumento di peso. (vedi pagina precedente)

Spostamento di V di un punto caratteristico (ad esempio il punto P di minima potenza) sarà proporzionale alla radice quarta dell'aumento di CDo

Polari tecniche – PUNTO A

PUNTO A : $\left(E \cdot V\right)_{MAX} \Rightarrow \left(\dfrac{E}{\sqrt{CL}}\right)_{MAX} \Rightarrow \left(\dfrac{D}{V}\right)_{MIN}$



Polari tecniche – PUNTO A

PUNTO A : $\left(E \cdot V\right)_{MAX} \Rightarrow \left(\dfrac{E}{\sqrt{CL}}\right)_{MAX} \Rightarrow \left(\dfrac{D}{V}\right)_{MIN}$

$$T_{no} = D = a \cdot V^2 + \frac{b}{V^2}$$

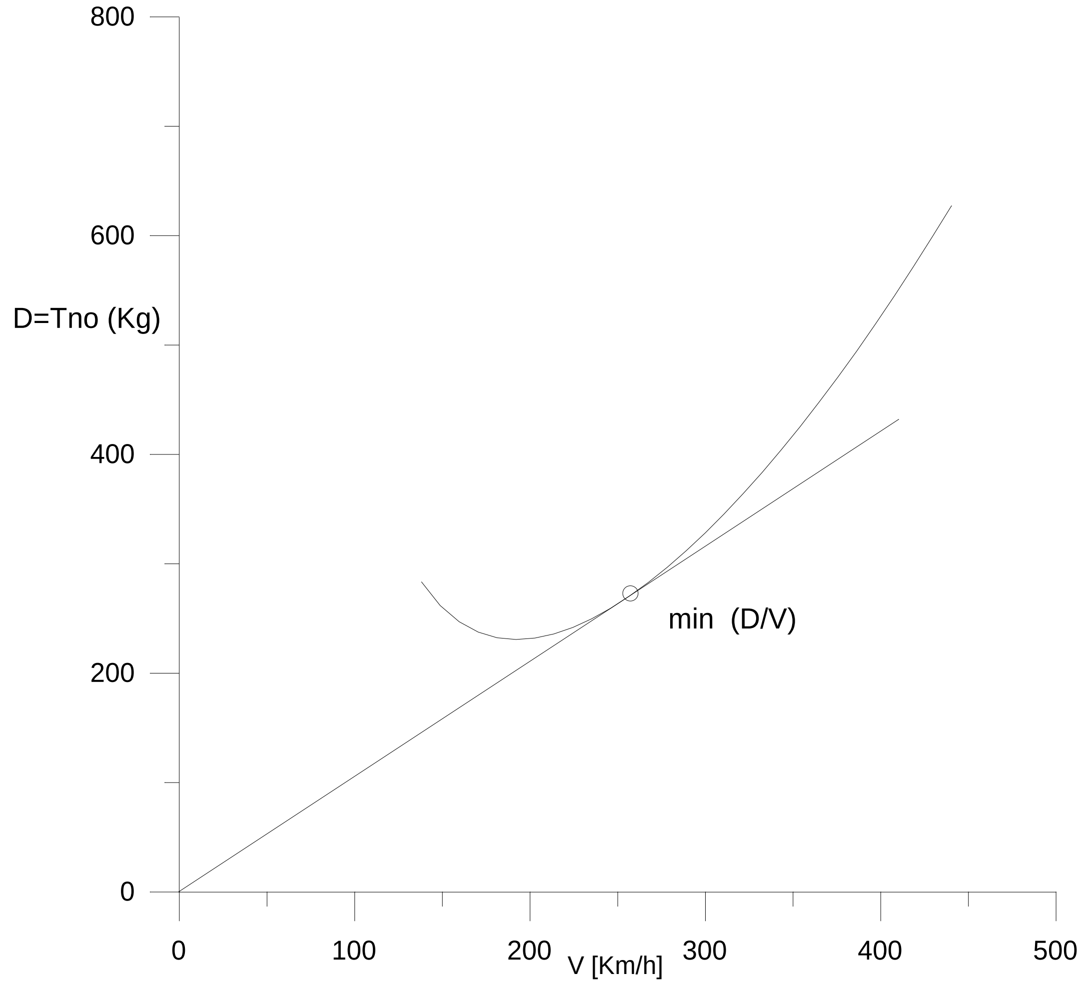
$$\frac{D}{V} = a \cdot V + \frac{b}{V^3}$$

$$\frac{d}{dV}\left(\frac{D}{V}\right) = a - 3\frac{b}{V^4} = 0$$

$$a = 3\frac{b}{V^4} \qquad a \cdot V^2 = 3 \cdot \frac{b}{V^2}$$

$$\boxed{\text{Do=3 Di}}$$

$$CDo = 3 \cdot CDi = 3 \cdot K \cdot CL^2$$



Polari tecniche – PUNTO A

$$CDo = 3 \cdot CDi = 3 \cdot K \cdot CL^2$$

$$CDi = \frac{1}{3} \cdot CDo$$

$$CD = CDo + CDi = \frac{4}{3} \cdot CDo \longrightarrow CD_A = \frac{4}{3} CDo$$

$$CL_A = \sqrt{\frac{CDo}{3 \cdot K}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo}$$

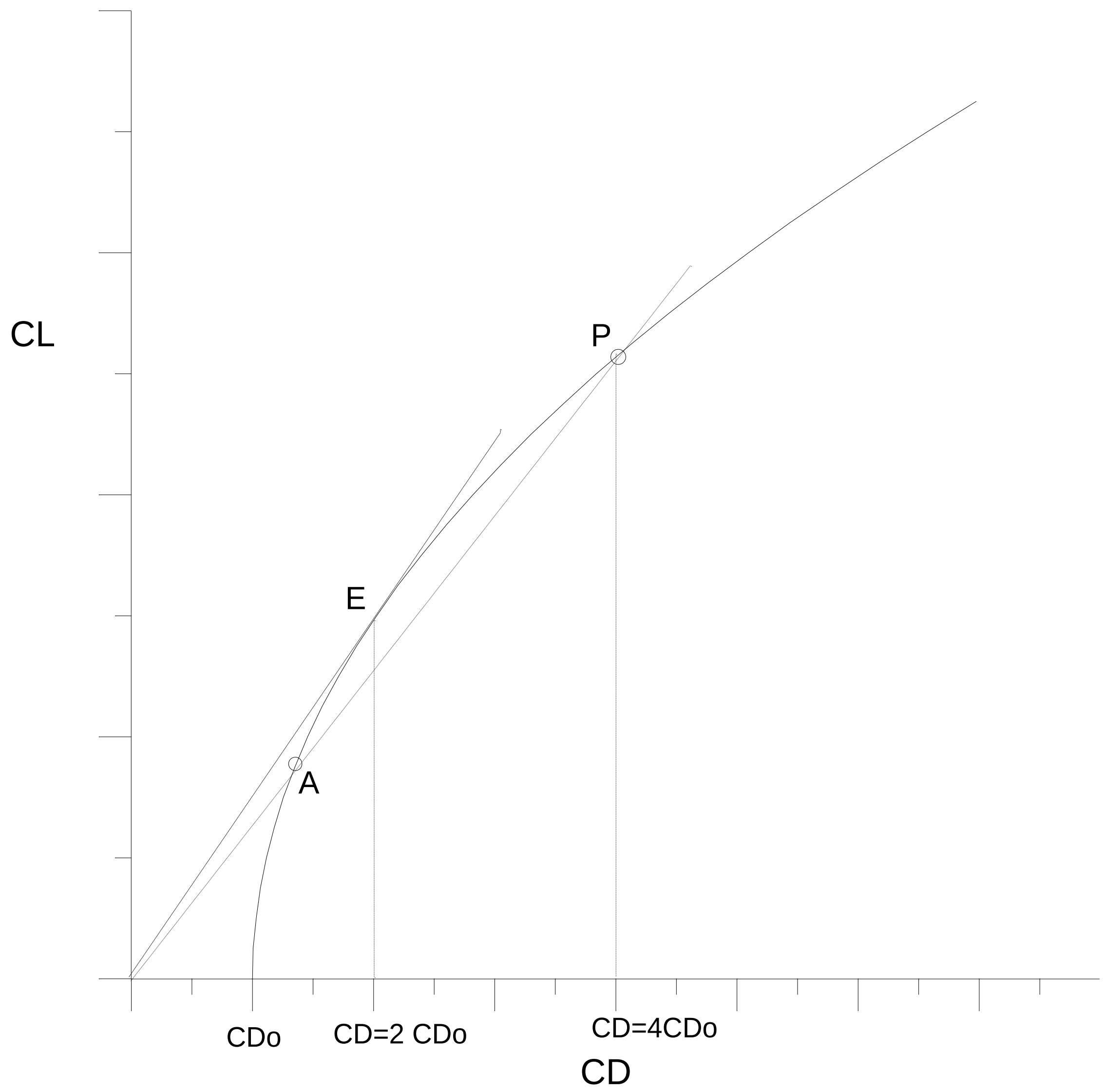
$$CL_A = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot CL_E = \frac{CL_E}{1.732}$$

$$E_A = \frac{CL_A}{CD_A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{CL_E}{CDo} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{CL_E}{CD_E} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot E_{MAX}$$

$$V_A = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \cdot \sqrt{\frac{1}{CL_A}} = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{CL_E}} = \sqrt[4]{3} \cdot V_E = 1.32\, V_E$$

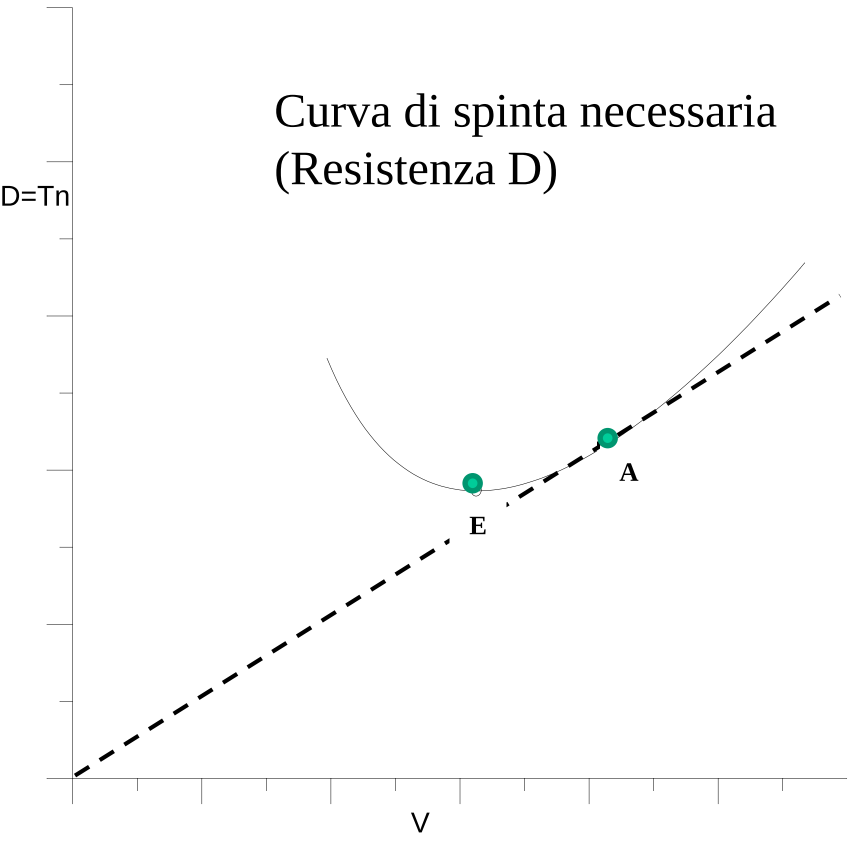
Polari tecniche – PUNTO A

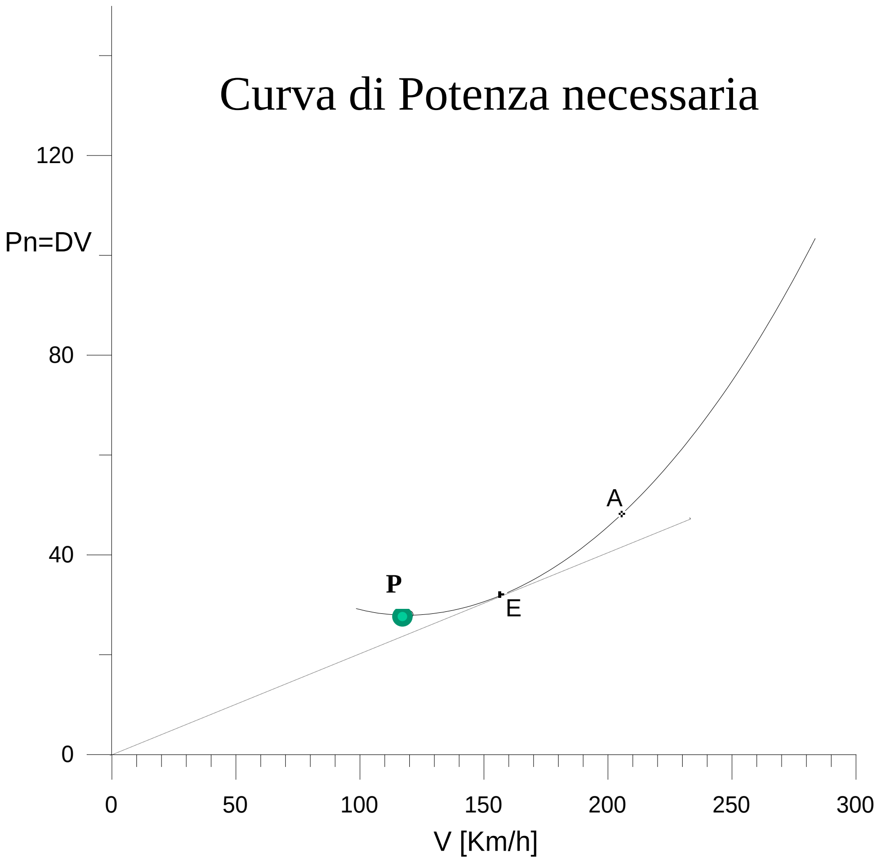
Punti A e P
=> stessa Efficienza



Polari tecniche – PUNTO A

$$V_A = 1.32\, V_E$$





Polare Parabolica – APPROCCIO ANALITICO

PUNTO E

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{Do} + KC_L^2} \qquad \frac{L}{D} = E \longrightarrow E = E_{MAX} \quad \text{se}$$

$$\frac{d(C_L / C_D)}{dC_L} = \frac{C_{Do} + KC_L^2 - C_L(2KC_L)}{(C_{Do} + KC_L^2)^2} = 0$$

$$C_{Do} + KC_L^2 - 2KC_L^2 = 0$$

$$C_{Do} = KC_L^2$$

$$C_L = C_{L_E} = \sqrt{\frac{C_{Do}}{K}} = \sqrt{C_{Do}\pi A\,Re} \qquad K = \frac{1}{\pi A\,Re}$$

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{max} = \left(\frac{C_L}{C_{Do} + KC_L^2}\right)_{max} = \frac{\sqrt{C_{Do}/K}}{C_{Do} + C_{Do}} = \frac{\sqrt{C_{Do}/K}}{2C_{Do}}$$

Polare Parabolica – APPROCCIO ANALITICO

PUNTO E

$$\mathbf{L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L}$$

$$\mathbf{W = \frac{1}{2}\rho V^2_{(L/D)_{max}} S \sqrt{\frac{C_{Do}}{K}}}$$

$$\mathbf{\frac{W}{S} = \frac{1}{2}\rho V^2_{(L/D)_{max}} \sqrt{\frac{C_{Do}}{K}}}$$

$$\mathbf{V_{(L/D)_{max}} = \left(\frac{2}{\rho}\sqrt{\frac{K}{C_{Do}}}\frac{W}{S}\right)^{1/2}}$$

$$\mathbf{V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{C_{L_E}}}}$$

Polare Parabolica – APPROCCIO ANALITICO

PUNTO P

$$P = D \cdot V \quad => \mathrm{P_{MIN}} => \left(D \cdot V\right)_{MIN} = \left(\frac{W}{E} \cdot V\right)_{MIN} => \left(\frac{W}{E} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_L}}\right)_{MIN}$$

$$\left(E \cdot \sqrt{C_L}\right)_{MAX} \quad => \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)_{MAX} = \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_{Do} + KC_L^2}\right)_{MAX}$$

$$\frac{\mathbf{d}\left(\mathbf{C_L^{3/2} / C_D}\right)}{\mathbf{dC_L}} = \frac{\left(\mathbf{C_{Do} + KC_L^2}\right)\left(\frac{3}{2}\mathbf{C_L^{1/2}}\right) - \mathbf{C_L^{3/2}}\left(\mathbf{2KC_L}\right)}{\mathbf{C_{Do} + KC_L^2}} = \mathbf{0}$$

$$\frac{3}{2}\mathbf{C_{Do}} + \mathbf{KC_L^{1/2}} + \frac{3}{2}\mathbf{KC_L^{5/2}} - \mathbf{2KC_L^{5/2}} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{C_{Do}} = \frac{1}{3}\mathbf{KC_L^2}$$

$$\mathbf{C_L = C_{L_P} = \sqrt{3C_{Do} / K} = \sqrt{3}C_{L_E}}$$

$$\left(\frac{\mathbf{C_L^{3/2}}}{\mathbf{C_D}}\right)_{\mathbf{max}} = \left(\frac{\mathbf{C_L^{3/2}}}{\mathbf{C_{Do} + KC_L^2}}\right)_{\mathbf{max}} = \frac{\left(\mathbf{3C_{Do} / K}\right)^{3/4}}{\mathbf{C_{Do} + 3C_{Do}}} = \frac{1}{\mathbf{4C_{Do}}}\left(\frac{\mathbf{3C_{Do}}}{\mathbf{K}}\right)^{3/4}$$

Polare Parabolica – APPROCCIO ANALITICO

PUNTO P

$$\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)_{max} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{K C_{Do}^{1/3}}\right)^{3/4}$$

$$L = W - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$$

$$W = \frac{1}{2}\rho V_{\left(C_L^{3/2}/C_D\right)_{max}} S \sqrt{\frac{3C_{Do}}{K}}$$

$$V_{\left(C_L^{3/2}/C_D\right)_{max}} = \left(\frac{2}{\rho}\sqrt{\frac{K}{3C_{Do}}}\frac{W}{S}\right)^{1/2}$$

$$V_{\left(C_L^{3/2}/C_D\right)_{max}} = 0.76 V_{(L/D)_{max}} = \frac{V_E}{1.32}$$

Polare Parabolica – APPROCCIO ANALITICO

PUNTO A

$$\left(\frac{D}{V}\right)_{MIN} = \left(\frac{W}{E}\cdot\frac{1}{V}\right)_{MIN} \Rightarrow \left(\frac{W}{E}\cdot\sqrt{C_L}\right)_{MIN}$$

$$\left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{MAX} \Rightarrow \left(\frac{C_L^{1/2}}{C_D}\right)_{MAX} = \left(\frac{C_L^{1/2}}{C_{Do}+KC_L^2}\right)_{MAX}$$

$$\frac{d\left(C_L^{1/2}/C_D\right)}{dC_L} = \frac{\left(C_{Do}+KC_L^2\right)\left(\frac{1}{2}C_L^{-1/2}\right) - C_L^{1/2}\left(2KC_L\right)}{C_{Do}+KC_L^2} = 0$$

$$\mathbf{C_{Do} = 3KC_L^2}$$

$$\left(\frac{\mathbf{C_L^{1/2}}}{\mathbf{C_{Do}}}\right)_{\mathbf{max}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3KC_{Do}^3}}\right)^{\mathbf{1/4}}$$

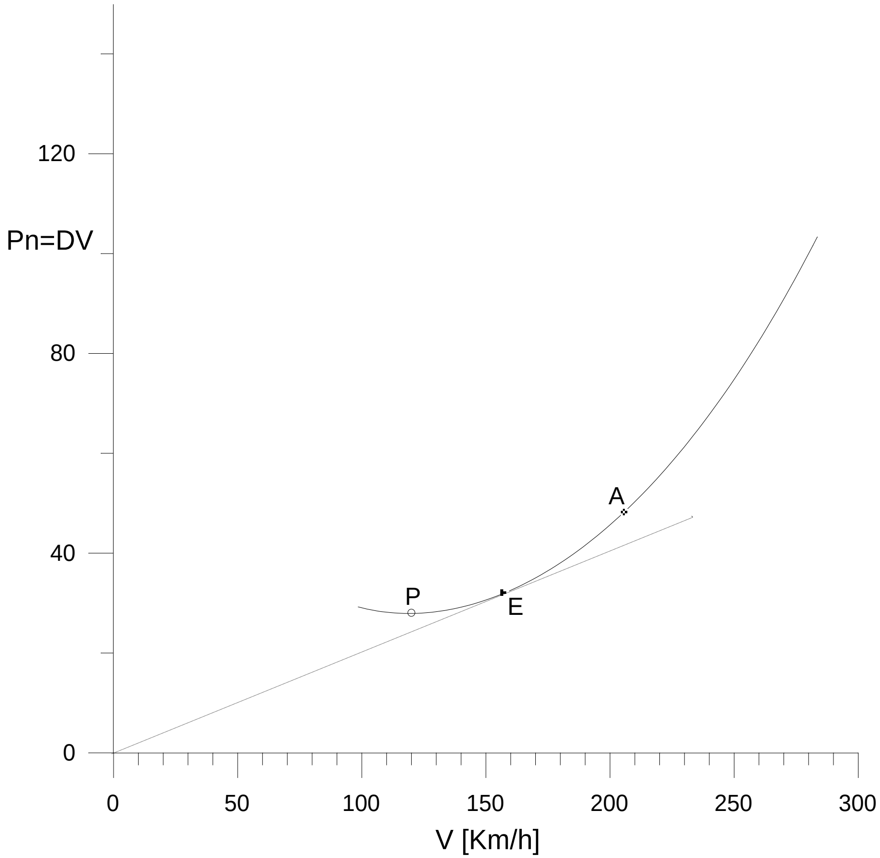
$$\mathbf{V_{\left(C_L^{1/2}/C_D\right)_{max}}} = \left(\frac{\mathbf{2}}{\rho}\sqrt{\frac{\mathbf{3K}}{\mathbf{C_{Do}}}\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{S}}}\right)^{\mathbf{1/2}}$$

$$\mathbf{V_{\left(C_L^{1/2}/C_D\right)_{max}} = 1.32\,V_{\left(L/D\right)_{max}}}$$

Polare Parabolica – APPROCCIO ANALITICO

$$\mathbf{V}_{\left(\mathbf{C_L^{3/2}} / \mathbf{C_D}\right)_{\mathbf{max}}} < \mathbf{V}_{\left(\mathbf{C_L} / \mathbf{C_D}\right)_{\mathbf{max}}} < \mathbf{V}_{\left(\mathbf{C_L^{1/2}} / \mathbf{C_D}\right)_{\mathbf{max}}}$$

$$V_P < V_E < V_A$$

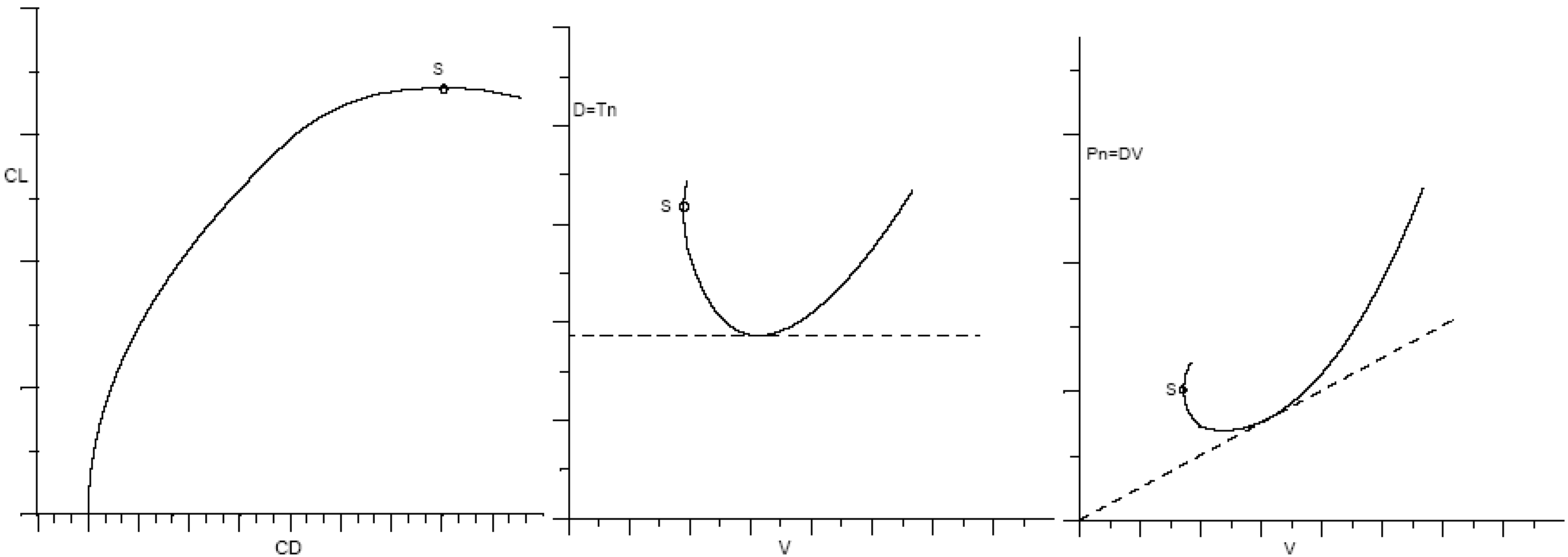


Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

Punto S

Stallo

Corrisponde a $C_L = C_{L\,max} \Rightarrow V = V_S = V_{min}$



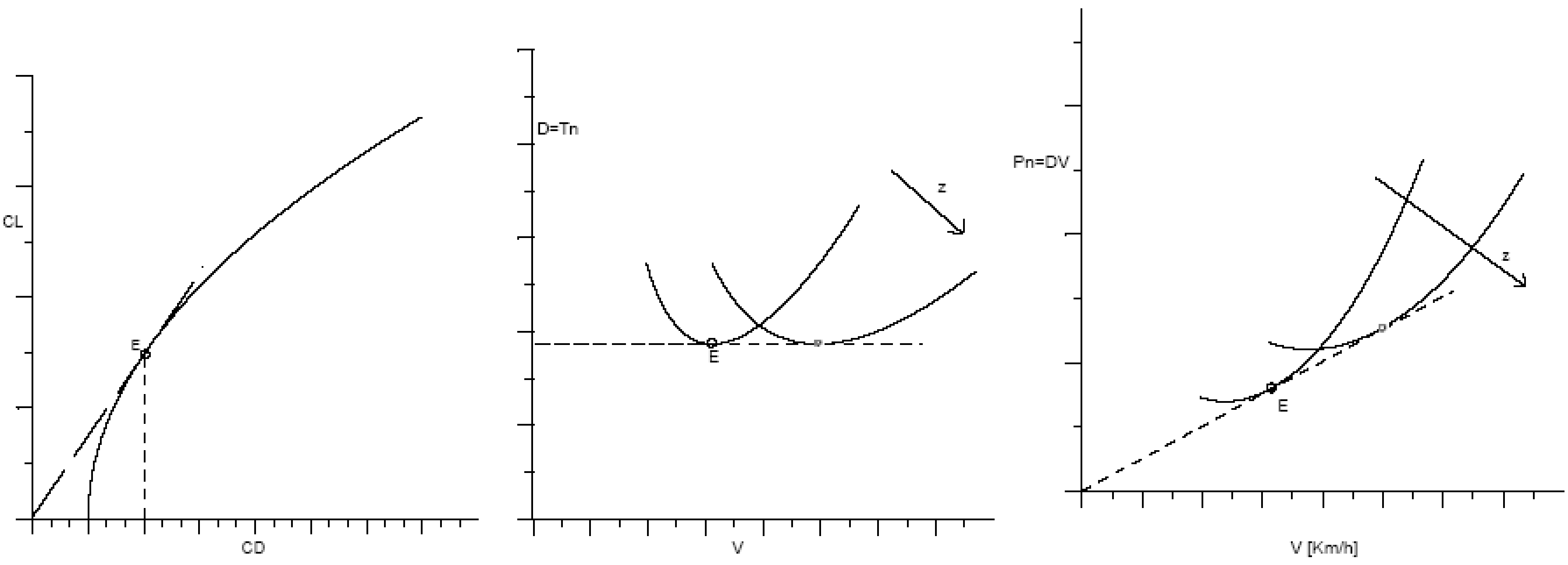
Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

Punto E

Massima efficienza

$D_{min} \Rightarrow E_{max}$ $\qquad$ $C_{Di}=C_{Do} \Rightarrow C_D=2\,C_{Do}$

$$C_{L\,E} = \sqrt{\pi\, AR_e\, C_{Do}} \qquad E_{max} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\frac{AR_e}{C_{Do}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\frac{b_e^{\,2}}{f}\right)} \qquad V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{C_{L\,E}}}$$



Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

Punto P

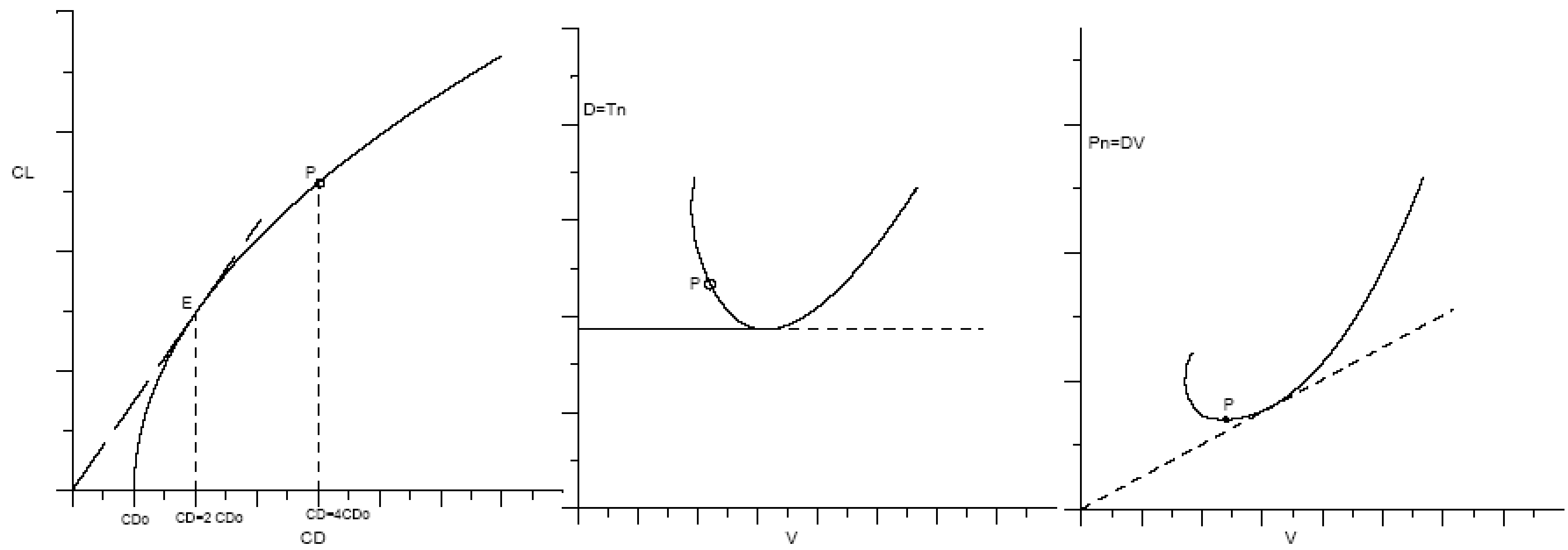
$$\Pi_{min}=(T_{no}\,V)_{min} \Rightarrow (C_D\,V^3)_{min} \Rightarrow \left(\frac{C_D}{C_L}\frac{1}{\sqrt{C_L}}\right)_{min} \Rightarrow \left(E\sqrt{C_L}\right)_{max}$$

$$\text{si ha :}\quad \Pi=\sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W^3}{S}}\,\frac{C_D}{C_L^{\,3/2}}$$

$$\Pi_{min} \Rightarrow \left(\frac{C_L^{\,3/2}}{C_D}\right)_{max} \Rightarrow \left(E\sqrt{C_L}\right)_{max}$$

$Di = 3\ D_o$ cioè $C_{Di} = 3\ C_{Do}$ $\qquad C_D = 4\ C_{Do}$

$$C_{L\,P} = \sqrt{3\,\pi\,AR_e\,C_{Do}} = \sqrt{3}\ C_{L\,E} = 1.732\ C_{L\,E}$$



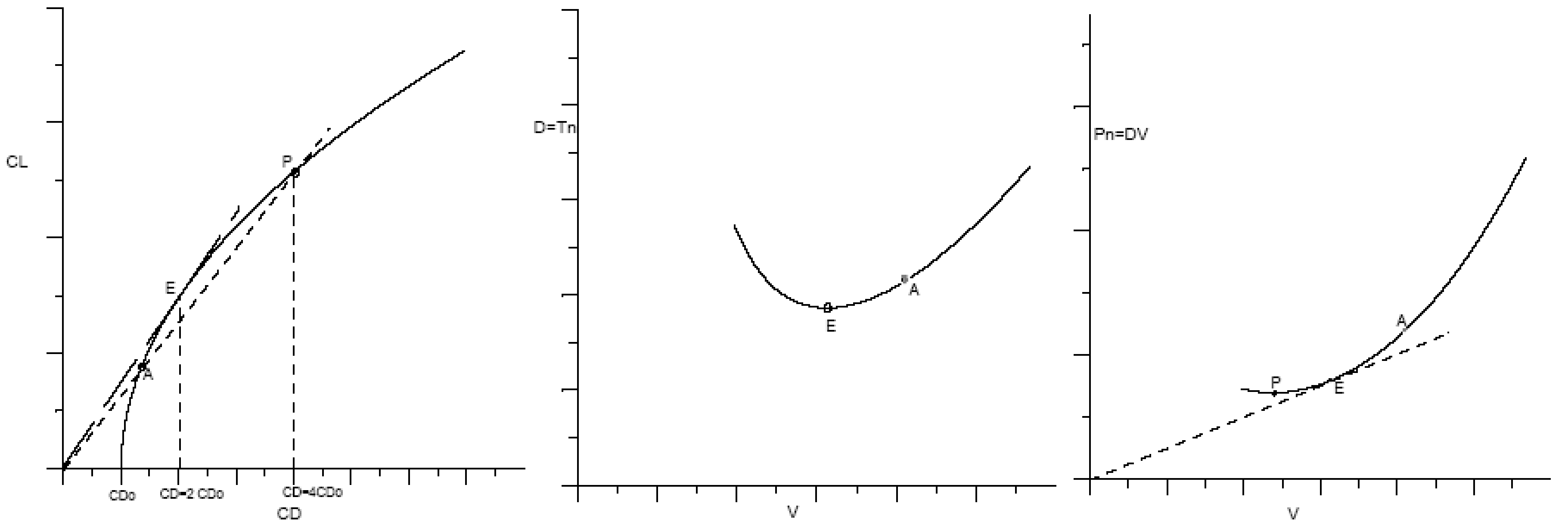
Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

Punto A

$$\left(\frac{T}{V}\right)_{min} \Rightarrow \left(C_D V\right)_{min} \Rightarrow \left(C_D \frac{1}{\sqrt{C_L}}\right)_{min} \Rightarrow \left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{max}$$

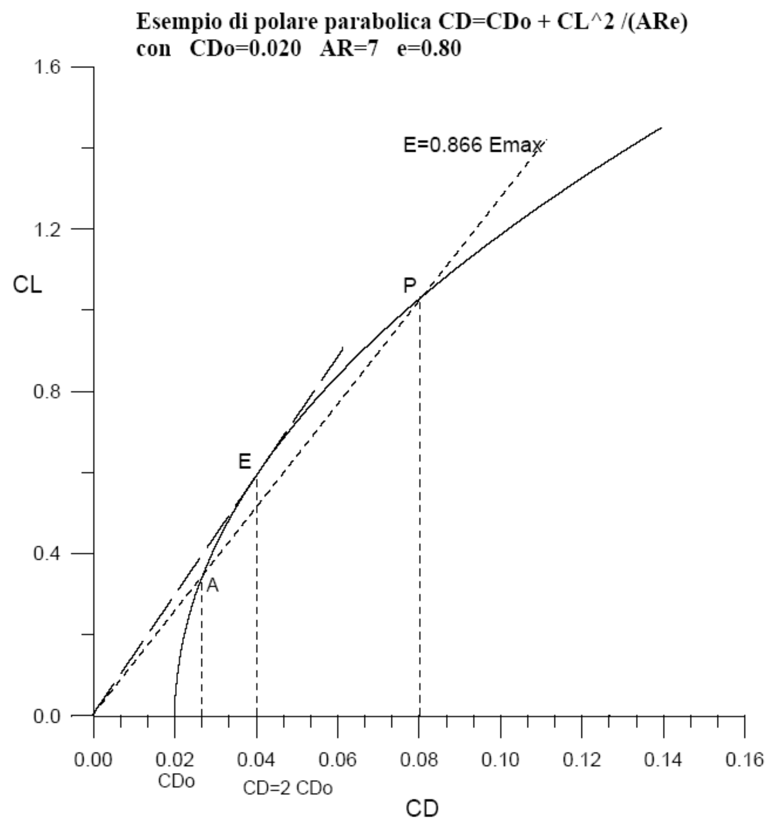
$$D_i = \frac{D_o}{3} \qquad C_{Di} = \frac{C_{Do}}{3} \qquad C_{D\,A} = C_{Do} + \frac{C_{Do}}{3} = \frac{4}{3} C_{Do}$$

$$C_{Di} = \frac{{C_L}^2}{\pi\, AR_e} = \frac{C_{Do}}{3} \qquad C_{L\,A} = \sqrt{\frac{\pi}{3} C_{Do}\, AR_e} = \frac{C_{L\,E}}{\sqrt{3}} = 0.577\, C_{L\,E}$$



Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

PUNTO	Efficienza CL/CD	C_L	C_D
A	$E=\sqrt{\frac{3}{4}}\,E_{max} = 0.866\,E_{max}$	$C_{L_A} = \frac{C_{L_E}}{\sqrt{3}} = 0.577\,C_{L_E}$	$C_{D_A} = C_{Do} + \frac{1}{3}C_{Do} = \frac{4}{3}C_{Do}$
E	$E=E_{max}=\sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{AR_e}{C_{Do}}}$	$C_{L_E} = \sqrt{\pi\,AR_e\,C_{Do}}$	$C_{D_E} = C_{Do} + C_{Do} = 2\,C_{Do}$
P	$E=\sqrt{\frac{3}{4}}\,E_{max} = 0.866\,E_{max}$	$C_{L_P} = \sqrt{3}\,C_{L_E} = 1.732\,C_{L_E}$	$C_{D_E} = C_{Do} + 3\,C_{Do} = 4\,C_{Do}$



Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

RELAZIONI DA CONSIDERARE:

$$\boxed{V_P = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1.32}}$$

$$\boxed{V_A = \sqrt[4]{3} \cdot V_E = 1.32 \cdot V_E}$$

$$E_A = E_P = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot E_E = 0.866 \cdot E_E$$

$$\boxed{D_{MIN} = D_E = \frac{W}{E_{MAX}}}$$

$$\boxed{D_A = D_P = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot D_E = \frac{D_E}{0.866} = 1.155 \cdot D_E}$$

$$\boxed{\Pi_P = \Pi_{MIN} = \frac{W}{E_P} \cdot V_P =}$$

$$\Pi_P = D_P \cdot V_P = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot D_E \right) \cdot \left(\frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt[4]{27}} \cdot \Pi_E = \frac{\Pi_E}{1.14}$$

$$\Pi_E = \frac{W}{E_E} \cdot V_E = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{W}{E_P} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot V_P = \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \cdot \Pi_P = 1.14 \cdot \Pi_P$$

$$\boxed{\Pi_E = 1.14 \cdot \Pi_P}$$

$$\Pi_A = \frac{W}{E_A} \cdot V_A = \frac{W}{E_P} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot V_P = \sqrt{3} \cdot \Pi_P = 1.732 \cdot \Pi_P$$

$$\boxed{\Pi_A = 1.732 \cdot \Pi_P}$$

Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

Relazioni tra le potenze necessarie al volo nei 3 punti caratteristici

$$\Pi_{\mathrm{P}} = D_P \cdot V_{\mathrm{P}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot D_E \right) \cdot \left(\frac{V_{\mathrm{E}}}{\sqrt[4]{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt[4]{27}} \cdot \Pi_{\mathrm{E}} = \frac{\Pi_{\mathrm{E}}}{1.14}$$

$$\Pi_{\mathrm{A}} = D_A \cdot V_{\mathrm{A}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot D_E \right) \cdot \left(\sqrt[4]{3} \cdot V_{\mathrm{E}} \right) = 1.52 \cdot \Pi_{\mathrm{E}}$$

Quindi , rispetto al valore minimo (punto P), ad una certa quota:

$$\boxed{\Pi_{\mathrm{E}} = 1.14 \cdot \Pi_{\mathrm{P}}}$$

$$\Pi_{\mathrm{A}} = D_A \cdot V_{\mathrm{A}} = \left(D_P \right) \cdot \left(\sqrt[4]{3} \cdot V_{\mathrm{E}} \right) = \left(D_P \right) \cdot \left(\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot V_{\mathrm{P}} \right) = \sqrt{3} \cdot \Pi_{\mathrm{P}} = 1.73 \cdot \Pi_{\mathrm{P}}$$

$$\boxed{\Pi_{\mathrm{A}} = 1.73 \cdot \Pi_{\mathrm{P}}}$$

…Vedi tabella riepilogativa pagina successiva

Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

TABELLA RIEPILOGATIVA :

$$E_{MAX} = \sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{AR \cdot e}{CDo}} \qquad CL_E = \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo}$$

$$D_{MIN} = \frac{W}{E_{MAX}} \qquad \Pi_{MIN} = \Pi_P = \frac{W}{E_P} \cdot V_P$$

1.155

Punto	CD/CDo	CL/CL_E	E/E_{MAX}	V/V_E	T/T_E	Π/Π_P
P	4	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{3}/2 = 0.866$	$1/\sqrt[4]{3} = 1/1.32$	$2/\sqrt{3}$	1
E	2	1	1	1	1	$\sqrt[4]{27}/2 = 1.14$
A	4/3	$1/\sqrt{3} = 0.577$	$\sqrt{3}/2 = 0.866$	$\sqrt[4]{3} = 1.32$	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{3} = 1.73$

Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI